BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 28 mai 2012 (barajul 3)

Problema 1. Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere reale care verifică $a + b + c = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}\,.$$

Problema 2. Fie a şi b numere naturale nenule. Dacă numărul $A = a^2 + ab + b^2$ este un multiplu de 10, arătaţi că A este în mod necesar un multiplu de 100.

Problema 3. În interiorul unui dreptunghi de arie 5 se consideră 9 poligoane de arie 1. Arătaţi că există printre aceste poligoane două care se intersectează, având aria suprafeţei comune cel puţin $\dfrac{1}{9}$.

Problema 4. **a)** Se dă un paralelogram $ABCD$ în care bisectoarele unghiurilor sale se intersectează în punctele E, F, G, H. Arătaţi că $EFGH$ este dreptunghi.
b) Dacă aria dreptunghiului $EFGH$ este egală cu o treime din aria paralelogramului $ABCD$, calculaţi raportul $\dfrac{AB}{BC}$

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere reale care verifică $a + b + c = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}\,.$$

Soluţie:
Din relaţia dată, obţinem

$$(x + y + z)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 1 \Leftrightarrow$$
$$2(xy + yz + zx) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \qquad (1).$$

Din inegalitatea evidentă $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ obţinem

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 + y^2 + z^2) \leq -(xy + yz + zx)$$
$$1 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 1 - (xy + yz + zx).$$

Astfel, relaţia (1) devine

$$2(xy + yz + zx) \leq 1 - (xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}\,.$$

Problema 2. Fie a şi b numere naturale nenule. Dacă numărul $A = a^2 + ab + b^2$ este un multiplu de 10, arătaţi că A este în mod necesar un multiplu de 100.

Soluţie:
Mai întâi să observăm că dacă unul dintre numerele a şi b este impar, atunci unul dintre numerele a^2, ab şi b^2 este impar, iar celelalte două au aceeaşi paritate, deci $A = a^2 + ab + b^2$ este impar, ceea ce nu convine deoarece A este divizibil cu 10.
Rămâne că numerele a şi b trebuie să fie pare.
Dacă a este divizibil cu 10, iar b nu este divizibil cu 10, atunci numerele a^2 şi ab sunt divizibile cu 10 dar b^2 nu este divizibil cu 10, prin urmare $A = a^2 + ab + b^2$ nu este divizibil cu 10, contradicţie.
Să presupunem că niciunul din numerele a şi b nu este divizibil cu 10.
Numerele a^2 şi b^2 au ultima cifră 4 sau 6. Dacă unul din ele ar avea ultima cifră 4, iar celălalt 6, atunci $a^2 + b^2$ s-ar termina în 0, deci ar fi divizibil cu 10. Ar rezulta că ab este divizibil cu 10. Cum a şi b sunt pare, ar rezulta că unul din ele este divizibil cu 10, contradicţie.
Rămâne cazul în care a^2 şi b^2 au aceeaşi ultimă cifră, 4 sau 6, dar atunci şi ab ar avea ultima cifră 4 sau 6, caz în care $a^2 + ab + b^2$ n-ar fi divizibil cu 10.
Ajungem la concluzia că atât a cât şi b trebuie să fie divizibile cu 10 şi atunci se vede uşor că A este divizibil cu 100.

Problema 3. În interiorul unui dreptunghi de arie 5 se consideră 9 poligoane de arie 1. Arătaţi că există printre aceste poligoane două care se intersectează, având aria suprafeţei comune cel puţin $\dfrac{1}{9}$.

Soluţie:
Fie P_1, P_2, ... , P_9 cele nouă poligoane de arie 1. Să presupunem prin absurd că oricare două din poligoanele P_i ar avea în comun o suprafaţă de arie mai mică decât $\dfrac{1}{9}$. Atunci aria poligonului P_2 care nu este în P_1 este mai mare ca $1-\dfrac{1}{9}$. În plus, aria poligonului P_3 care nu este acoperită de niciunul din poligoanele P_1 şi P_2 este mai mare ca $1-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{9}$. Continuând raţionamentul, ajungem la sfârşit că aria poligonului P_9 care nu este acoperită de niciunul din poligoanele P_1, P_2, ... , P_8 este mai mare ca $1-8\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{9}$.

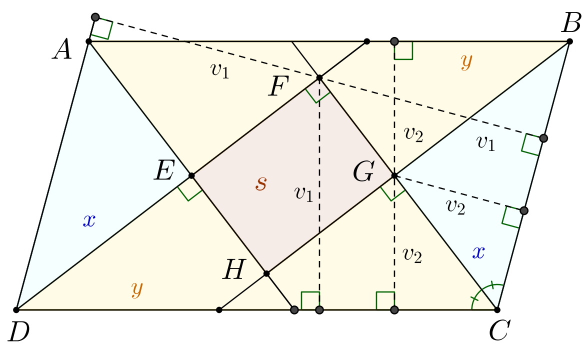
Prin urmare, aria acoperită de cele 9 poligoane este mai mare ca $1+\dfrac{8}{9}+\dfrac{7}{9}+\ldots+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}=5$, adică mai mare decât aria dreptunghiului, ceea ce este o contradicţie.

Problema 4. a) Se dă un paralelogram $ABCD$ în care bisectoarele unghiurilor sale se intersectează în punctele E, F, G, H. Arătaţi că $EFGH$ este dreptunghi.
b) Dacă aria dreptunghiului $EFGH$ este egală cu o treime din aria paralelogramului $ABCD$, calculaţi raportul $\dfrac{AB}{BC}$.

Soluţia 1:
a) Deoarece $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle D)=180°$, iar $(AE$ şi $(DE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$, rezultă că

$$m(\sphericalangle EAD)+m(\sphericalangle EDA)=90°,$$

deci $m(\sphericalangle FEH)=90°$. Analog se arată şi despre celelalte unghiuri ale lui $EFGH$ că sunt drepte, deci acesta este un dreptunghi.



b) Să notăm cu S aria paralelogramului $ABCD$, cu s aria dreptunghiului $EFGH$, cu x ariile triunghiurilor congruente DEA şi CGB şi cu y ariile porţiunilor din triunghiurile congruente DFC şi AHB care nu sunt conţinute în dreptunghiul $EFGH$. Atunci avem relaţiile:

$$s = \frac{1}{3}S \text{ şi } 2x + 2y + s = S \Leftrightarrow x + y = \frac{S}{3} \qquad (1).^1$$

De asemenea

$$y + s = \frac{AB \cdot v_1}{2} \Rightarrow y = \frac{AB \cdot v_1}{2} - \frac{S}{3}$$

şi

$$x = \frac{BC \cdot v_2}{2}.$$

Înlocuind în (1), obţinem $\frac{AB \cdot v_1}{2} - \frac{S}{3} + \frac{BC \cdot v_2}{2} = \frac{S}{3}$, deci

$$AB \cdot v_1 + BC \cdot v_2 = \frac{4S}{3}. \qquad (2)$$

Deoarece vârful G se află pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$, el este egal depărtat de laturile AB, BC şi CD ale paralelogramului, prin urmare

$$S = BC \cdot 2v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{S}{2BC}.$$

Analog se obţine $v_2 = \frac{S}{2AB}$ şi, înlocuind în relaţia (2), găsim

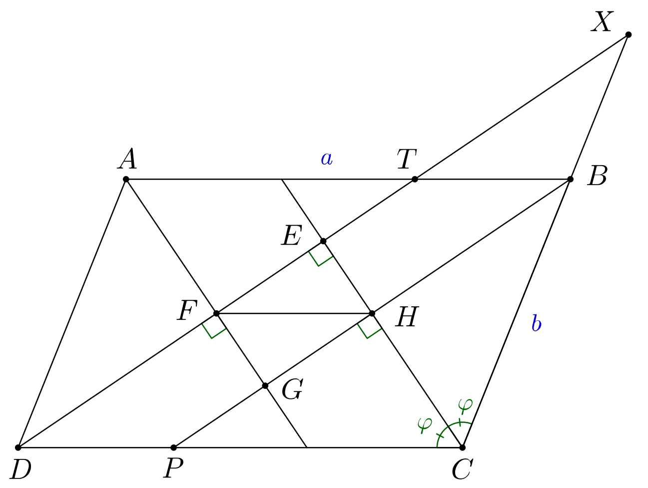
$$AB \cdot \frac{S}{2BC} + BC \cdot \frac{S}{2AB} = \frac{4S}{3} \Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} = \frac{8}{3}$$

şi, notând $\alpha = \frac{AB}{BC}$, ultima ecuaţie devine

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\alpha^2 - 8\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

[1] dacă $E, F, G, H \in int(ABCD)$

Soluţia 2:



b) Mai întâi calculăm raportul $\dfrac{\mathscr{A}_{(DEC)}}{\mathscr{A}_{(ABCD)}}$:

$\mathscr{A}_{(DEC)} = \dfrac{1}{2}\mathscr{A}_{(DXC)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a^2\sin 2\varphi$ pentru că triunghiul DXC este isoscel, unde $a = AB$, $\varphi = \dfrac{1}{2}C$; $\mathscr{A}_{(ABCD)} = ab\sin 2\varphi$, unde $b = BC$, deci $\dfrac{\mathscr{A}_{(DEC)}}{\mathscr{A}_{(ABCD)}} = \dfrac{a}{4b}$, ceea ce implică $\mathscr{A}_{(DEC)} = \dfrac{a}{4b}\cdot\mathscr{A}_{(ABCD)}$ (1).

Cum $DTBP$ este paralelogram, $DP = TB = FH = |a-b|$, din $FH \parallel DP \parallel TB$, avem:

$\dfrac{\mathscr{A}_{(FEH)}}{\mathscr{A}_{(DEC)}} = \left(\dfrac{FH}{DC}\right)^2 = \left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2 = \left(1-\dfrac{b}{a}\right)^2$ şi din (1) rezultă

$$\frac{\frac{1}{2}\mathscr{A}_{(EFGH)}}{\frac{a}{4b}\cdot\mathscr{A}_{(ABCD)}} = \left(1-\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\mathscr{A}_{(ABCD)}}{\frac{a}{4b}\cdot\mathscr{A}_{(ABCD)}} = \left(1-\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{2b}{3a} = 1-\frac{2b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

de unde

$$\frac{b}{a} = \frac{4\pm\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4\mp\sqrt{7}}{3}.$$