BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid"
Cipru, 3 martie 2012 (barajul 2)

Problema 1. Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b este 1, determinaţi toate perechile (a, b) pentru care fracţia $k = \dfrac{7a-b}{a+2b}$ este un număr natural nenul.

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu dimensiunile $AB = a$ şi $BC = b$ şi E un punct pe latura (CD) astfel încât triunghiul DEB este isoscel şi $m(\sphericalangle AEB) = 90°$. Calculaţi raportul $\dfrac{a}{b}$.

Problema 3. Arătaţi că numărul $A = 19^{19} + 69^{69}$ este multiplu de 44.

Problema 4. Datorită crizei economice, pentru a obţine preţuri mai bune de la furnizori, 100 de mici societăţi din Limassol au decis să se organizeze în grupuri de societăţi astfel încât:
i. în fiecare grup sunt cel mult 50 de societăţi şi
ii. pentru oricare două societăţi există cel puţin un grup care le conţine pe amândouă.
Aflaţi numărul minim de grupuri care pot fi formate cu regulile de mai sus.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b este 1, determinaţi toate perechile (a, b) pentru care fracţia $k = \dfrac{7a-b}{a+2b}$ este un număr natural nenul.

Soluţie:

$$\frac{7a-b}{a+2b} = k \Longleftrightarrow (7-k)a = (1+2k)b$$

Atunci $7-k>0$, adică $k<7$, şi, cum k este număr natural nenul, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

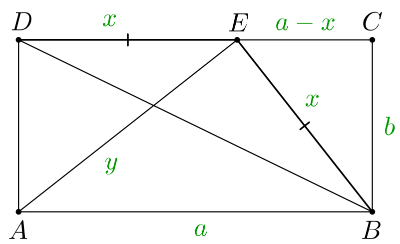
- dacă $k = 1$, atunci $b = 2a$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $(a, b) = (1, 2)$.
- dacă $k = 2$, atunci $b = a$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $(a, b) = (1, 1)$.
- dacă $k = 3$, atunci $7b = 4a$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $(a, b) = (7, 4)$.
- dacă $k = 4$, atunci $3b = a$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $(a, b) = (3, 1)$.
- dacă $k = 5$, atunci $11b = 2a$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $(a, b) = (11, 2)$.
- dacă $k = 6$, atunci $13b = a$ şi, cum $(a, b) = 1$, rezultă $(a, b) = (13, 1)$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu dimensiunile $AB = a$ şi $BC = b$ şi E un punct pe latura (CD) astfel încât triunghiul DEB este isoscel şi $m(\sphericalangle AEB) = 90°$. Calculaţi raportul $\dfrac{a}{b}$.

Soluţie:

Din ipoteză avem $b^2 + x^2 = y^2$ şi $x^2 + y^2 = a^2$. Adunând membru cu membru aceste egalităţi obţinem

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2). \qquad (1)$$



De asemenea, din triunghiul BEC, avem

$$x^2 = b^2 + (a-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2+b^2}{2a}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 = \frac{a^2-b^2}{2} \Leftrightarrow a^4 - 4a^2b^2 - b^4 = 0,$$

iar rezolvând această ecuaţie obţinem

$$a^2 = (2+\sqrt{5})b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

Problema 3. Arătaţi că numărul $A = 19^{19} + 69^{69}$ este multiplu de 44.

Soluţie:

• $A = 19^{19} + 69^{69} = (19^{19} + 1) + (69^{69} - 1) = 20k + 68\ell = 4(5k + 17\ell)$, deci $4 \mid A$.

• $A = 19^{19}+69^{69} = (19^{19}+3^{19})+(69^{69}-3^{69})+(3^{69}-3^{19}) = 22m+66n+3^{19}(3^{50}-1) = 22m + 66n + 3^{19}(243^{10} - 1) = 22m + 66n + 3^{19} \cdot 242p = 11(2m + 6n + 3^{19} \cdot 22p)$, deci $11 \mid A$.

Aşadar $4 \mid A$ şi $11 \mid A$, iar cum $(4, 11) = 1$, rezultă $44 \mid A$, adică A este multiplu de 44.

Problema 4. Datorită crizei economice, pentru a obţine preţuri mai bune de la furnizori, 100 de mici societăţi din Limassol au decis să se organizeze în grupuri de societăţi astfel încât:

i. în fiecare grup sunt cel mult 50 de societăţi şi

ii. pentru oricare două societăţi există cel puţin un grup care le conţine pe amândouă.

Aflaţi numărul minim de grupuri care pot fi formate cu regulile de mai sus.

Soluţie:

Din ipotezele problemei deducem că dacă o societate s ar aparţine la doar două grupuri, A şi B, atunci A şi B conţin, pe lângă s, cel mult alte 49 de societăţi fiecare, deci din reuniunea celor două grupuri fac parte cel mult 99 de societăţi. Prin urmare există (cel puţin) o societate s' care lipseşte şi din A şi din B, deci nu există niciun grup care să conţină atât s cât şi s', ceea ce contrazice ii.

Aşadar, fiecare societate trebuie să facă parte din cel puţin 3 grupuri. Prin urmare, numărul minim de grupuri trebuie să fie cel puţin

$$\frac{3 \cdot 100}{50} = 6.$$

Un exemplu de cum se poate realiza acest lucru:

Fie $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ cele 100 de societăţi şi să le împărţim în 4 mulţimi de câte 25, după cum urmează:

$$\begin{aligned} A &= \{s_1, s_2, \ldots, s_{25}\} \\ B &= \{s_{26}, s_{27}, \ldots, s_{50}\} \\ C &= \{s_{51}, s_{52}, \ldots, s_{75}\} \\ D &= \{s_{76}, s_{77}, \ldots, s_{100}\}. \end{aligned}$$

Grupăm societăţile în următoarele 6 grupuri: $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $B \cup C$, $B \cup D$ şi $C \cup D$.

Astfel am obţinut o grupare a societăţilor în 6 grupuri, ceea ce arată că acesta este numărul minim de grupuri.