BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 4 februarie 2012 (barajul 1)

Problema 1. Determinaţi soluţiile nenule (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} x(x-1) = yz \\ y(y-2) = zx \\ z(z-3) = xy. \end{cases}$$

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AD = 3$ şi $AB = 4$. Perpendiculara din A pe diagonala BD o intersectează pe aceasta în K. Paralela dintr-un punct oarecare, M, al segmentului $[AK]$ la diagonala BD intersectează AB în N.
Dacă NZ şi NH sunt perpendicularele duse din N pe diagonalele AC şi BD ($Z \in AC$, $H \in BD$), calculaţi suma $NZ + NH$.

Problema 3. Determinaţi soluţiile naturale nenule (x, y) ale ecuaţiei

$$\frac{3}{5}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{4}\,xy = 83.$$

Problema 4. Stabiliţi dacă mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ poate fi partiţionată în submulţimi astfel încât cel mai mare element al fiecărei submulţimi să fie egal cu suma celorlalte elemente din A.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Determinaţi soluţiile nenule (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} x(x-1) = yz \\ y(y-2) = zx \\ z(z-3) = xy. \end{cases}$$

Soluţie:

$$\begin{cases} x(x-1) = yz & (1) \\ y(y-2) = zx & (2) \\ z(z-3) = xy. & (3) \end{cases}$$

Începem prin a observa că tripletele $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ şi $(0, 0, 3)$ sunt soluţii ale sistemului.
Căutăm acum alte soluţii (x, y, z) ale sistemului, cu $xyz \neq 0$. Înmulţind ecuaţiile câte două, obţinem sistemul echivalent

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = z^2 \\ (y-2)(z-3) = x^2 \\ (z-3)(x-1) = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - z^2 = y + 2x - 2 \\ yz - x^2 = 3y + 2z - 6 \\ xz - y^2 = 3x + z - 3 \end{cases} \overset{(1),(2),(3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -3z = y + 2x - 2 \\ -x = 3y + 2z - 6 \\ -2y = 3x + z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{7}{18}, \frac{35}{18}, \frac{5}{18}\right).$$

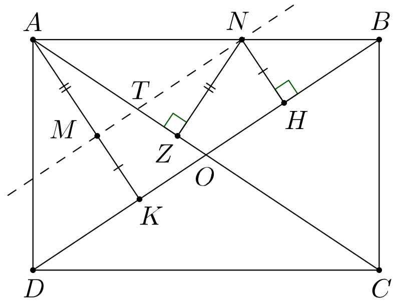
Prin urmare, mulţimea S a tuturor soluţiilor (x, y, z) ale sistemului este

$$S = \left\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), \left(-\frac{7}{18}, \frac{35}{18}, \frac{5}{18}\right)\right\}.$$

Problema 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AD = 3$ şi $AB = 4$. Perpendiculara din A pe diagonala BD o intersectează pe aceasta în K. Paralela dintr-un punct oarecare, M, al segmentului $[AK]$ la diagonala BD intersectează AB în N.
Dacă NZ şi NH sunt perpendicularele duse din N pe diagonalele AC şi BD ($Z \in AC$, $H \in BD$), calculaţi suma $NZ + NH$.
Soluţie:
Din teorema lui Pitagora rezulta că $BD = 5$. Din asemănarea triunghiurilor $\Delta\, ABD$ şi $\Delta\, KAD$ rezultă $AD^2 = BD \cdot KD$, de unde $KD = \dfrac{9}{5}$. Din teorema lui Pitagora în triunghiul AKD rezultă $AK^2 = 9 - \left(\dfrac{9}{5}\right)^2$, de unde $AK = \dfrac{12}{5}$.
Patrulaterul $NHKM$ este dreptunghi, deci $NH = MK$ (1).
Deoarece $MN \parallel BD$, avem $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABD$. Triunghiul AOB este isoscel, deci $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ABD$.

De aici rezultă că şi triunghiul ATN este isoscel, unde T este intersecţia dreptelor MN şi AC. Aşadar, $AT = TN$. Rezultă că triunghiurile dreptunghice $\Delta\, AMT$ şi $\Delta\, NZT$ sunt congruente, deci $AM = NZ$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $NZ + NH = AK = \dfrac{12}{5}$.



Problema 3. Determinaţi soluţiile naturale nenule (x, y) ale ecuaţiei

$$\frac{3}{5}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{4}\, xy = 83.$$

Soluţie:

Ecuaţia este echivalentă cu $2(x + y^2) + (x - y)^2 = 664$ (1),
de unde rezultă că $x - y$ este par, adică $x - y = 2a$, cu $a \in \mathbb{N}$. Atunci $x + y = 2a + 2y = 2(a + y)$, deci şi $x + y$ este număr par, adică $x + y = 2b$, cu $b \in \mathbb{N}$. Atunci (1) devine $8b^2 + 4a^2 = 664$, sau $2b^2 + a^2 = 166$. Deducem că a este par. Fie $c \in \mathbb{N}$ astfel ca $a = 2c$. Obţinem că $b^2 + 2c^2 = 83$. Deducem că b este impar, adică $b = 2d + 1$, cu $d \in \mathbb{N}$. Rezultă că $(2d + 1)^2 + 2c^2 = 83$, apoi $c^2 = 41 - 2d(d + 1)$. Obţinem că $41 - 2d(d + 1) \geq 0$, adică $\dfrac{-1 - \sqrt{83}}{2} < d < \dfrac{-1 + \sqrt{83}}{2}$ şi, cum d este natural, $d \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pentru $d = 0, 1, 2, 3$, găsim $c^2 = 41,\ 37,\ 29,\ 17$, ceea ce cu se poate. Pentru $d = 1$ rezultă $c = 1$, apoi $a = 2$, $b = 9$, deci $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 18 \end{cases}$, de unde $x = 11$, $y = 7$.
În final, găsim că $(x, y) = (11, 7)$ este într-adevăr soluţie a ecuaţiei.

Problema 4. Stabiliţi dacă mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ poate fi partiţionată în submulţimi astfel încât cel mai mare element al fiecărei submulţimi să fie egal cu suma celorlalte elemente din A.

Soluţia:

Să presupunem că A poate fi partiţionată în astfel de submulţimi. Atunci elementul 2012 va fi cel mai mare element al unei submulţimi. 2011 nu poate face parte dintr-o altă submulţime pentru că ar fi cel mai mare element al acesteia şi, ca atare, ar trebui să fie egal cu o sumă printre termenii căreia se află şi 2012, ceea ce este imposibil. Prin urmare, 2011 trebuie să fie în aceeaşi subulţime ca şi 2012. Apoi şi elementul 2010 trebuie să fie în aceeaşi submulţime ca şi 2012 şi 2011 şi aşa mai departe până la elementul 1. Dar atunci ar trebui ca $2012 = 1 + 2 + \ldots + 2011$, ceea ce nu convine.
Prin urmare, mulţimea A nu poate fi partiţionată în submulţimi cu proprietatea din enunţ.[1]

[1] Parte din soluţia oficială nu este necesară: este suficient să observăm că 2012, fiind cel mai mare element din submulţimea căreia îi aparţine, nu poate fi egal cu suma $1 + 2 + \ldots + 2011$.