# BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
# Cipru, 7 mai 2011 (barajul 3)

**Problema 1.** a) Demonstraţi identitatea
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ verifică sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 90, \end{cases}$$

găsiţi valorile lui $xyz$ şi $x^4 + y^4 + z^4$.

**Problema 2.** În interiorul unghiului $\sphericalangle xOy$ se consideră punctul $A$ şi fie $A'$ şi $A''$ simetricele punctului $A$ faţă de dreptele $Ox$, respectiv $Oy$. Dacă $A'A''$ intersectează laturile $(Ox$ şi $(Oy$ ale unghiului $\sphericalangle xOy$ în punctele $M$, respectiv $N$, demonstraţi că triunghiul $AMN$ are perimetrul minim dintre toate triunghiurile care au un vârf în $A$, iar celelalte două pe laturile $(Ox$ şi respectiv $(Oy$ ale unghiului $\sphericalangle xOy$.

**Problema 3.** În fiecare din cazurile de mai jos, stabiliţi dacă există 5 puncte distincte în plan astfel încât fiecare triunghi cu vârfurile în trei din cele cinci puncte să fie dreptunghic:
**Cazul 1:** nicicare 4 din cele 5 puncte nu sunt coliniare;
**Cazul 2:** nicicare 3 din cele 5 puncte nu sunt coliniare.

**Problema 4.** Patru numere naturale de trei cifre au aceeaşi primă cifră şi au proprietatea că suma lor este divizibilă cu trei din cele patru numere. Aflaţi cele patru numere.

*Timp de lucru:* 4 ore şi 30 de minute

**Soluţii oficiale:**

**Problema 1.** a) Demonstraţi identitatea
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ verifică sistemul $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 90, \end{cases}$ găsiţi valorile lui $xyz$ şi $x^4 + y^4 + z^4$.

**Soluţie:**

a)[1] $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) = (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab] = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

b) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ implică $6^2 = 26 + 2(xy + yz + zx)$, de unde $xy + yz + zx = 5$.

Folosind identitatea demonstrată la a) obţinem că $90 - 3xyz = 6(26 - 5)$, de unde $\boxed{xyz = -12}$.

Completând a un pătrat, $x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 26^2 - 2[(xy+yz+zx)^2 - 2(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy)] = 676 - 2[5^2 - 2xyz(x+y+z)] = 676 - 2(25 - 2 \cdot (-12) \cdot 6) = 676 - 338 = \boxed{338}$.

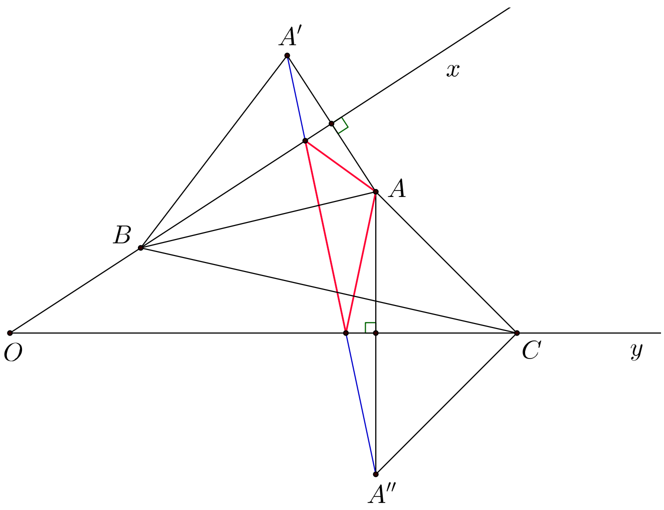
**Problema 2.** În interiorul unghiului $\sphericalangle xOy$ se consideră punctul $A$ şi fie $A'$ şi $A''$ simetricele punctului $A$ faţă de dreptele $Ox$, respectiv $Oy$. Dacă $A'A''$ intersectează laturile $(Ox$ şi $(Oy$ ale unghiului $\sphericalangle xOy$ în punctele $M$, respectiv $N$, demonstraţi că triunghiul $AMN$ are perimetrul minim dintre toate triunghiurile care au un vârf în $A$, iar celelalte două pe laturile $(Ox$ şi respectiv $(Oy$ ale unghiului $\sphericalangle xOy$.

**Soluţie:**

Deoarece $MA = MA'$ şi $NA = NA''$, perimetrul triunghiului $AMN$ este $P_{AMN} = A'A''$.

Dacă $B \in Ox$ şi $C \in Oy$, din $AB = A'B$ şi $AC = A''C$, perimetrul triunghiului $ABC$ este $P_{ABC} = AB + BC + CA = A'B + BC + CA'' \geq A'A'' = P_{AMN}$. Avem egalitate dacă şi numai dacă $B = M$ şi $C = N$.

[1] Mai simplu ar fi fost să se desfacă parantezele în membrul drept, ajungându-se imediat la expresia din membrul stâng.




**Problema 3.** În fiecare din cazurile de mai jos, stabiliţi dacă există 5 puncte distincte în plan astfel încât fiecare triunghi cu vârfurile în trei din cele cinci puncte să fie dreptunghic:
**Cazul 1:** nicicare 4 din cele 5 puncte nu sunt coliniare;
**Cazul 2:** nicicare 3 din cele 5 puncte nu sunt coliniare.
**Soluţie:**
**Cazul 1:** Da, există: de exemplu vârfurile şi centrul unui pătrat formează o mulţime de 5 puncte care are proprietatea cerută.
**Cazul 2:** Să presupunem că există 5 puncte care satisfac condiţiile date. Deoarece oricare trei puncte sunt necoliniare, deci formează triunghi, există 10 triunghiuri dreptunghice cu vârfurile în aceste 5 puncte. Atunci există un punct $O$ care este vârful opus ipotenuzei în două triunghiuri. Fie $OAB$ şi $OXY$ două asemenea triunghiuri. Dacă $\{X, Y\} \cap \{A, B\} \neq \varnothing$, atunci trei dintre puncte sunt coliniare (de exemplu, dacă $X = A$, atunci punctele $Y, O, B$ sunt coliniare). Dacă $X$ (sau $Y$) şi $B$ sunt în semiplane diferite determinate de $OA$, atunci $\sphericalangle XOB$ (respectiv $\sphericalangle YOB$) este obtuz, deci triunghiul $XOB$ nu este dreptunghic. Aşadar, atât $X$ cât şi $Y$ trebuie să se afle în semiplanul determinat de $OA$ care îl conţine pe $B$. Analog se arată că $X$ şi $Y$ sunt în semiplanul determinat de $OB$ care îl conţine pe $A$, deci $X, Y \in int(\sphericalangle AOB)$, ceea ce contrazice $m(\sphericalangle XOY) = 90°$.

**Problema 4.** Patru numere naturale de trei cifre au aceeaşi primă cifră şi au proprietatea că suma lor este divizibilă cu trei din cele patru numere. Aflaţi cele patru numere.
**Soluţie:**
Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ numerele căutate, $S$ suma lor, iar $a$ prima cifră a numerelor.

Atunci

$$100a \leq x_1 < 100(a+1) \qquad (1)$$
$$100a \leq x_2 < 100(a+1) \qquad (2)$$
$$100a \leq x_3 < 100(a+1) \qquad (3)$$
$$100a \leq x_4 < 100(a+1) \qquad (4)$$

Adunând relaţiile (1), (2) şi (3), rezultă $300a \leq x_1 + x_2 + x_3 < 300(a+1)$, deci $300a + x_4 \leq S < 300(a+1) + x_4$. Analog se obţin alte trei inegalităţi analoage.

Aşadar, $300a + x_i \leq S < 300(a+1) + x_i$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$.

Rezultă că $1 + \dfrac{300a}{x_i} \leq \dfrac{S}{x_i} < 1 + \dfrac{300(a+1)}{x_i}$ (5).

Folosind relaţiile (1), (2), (3) şi (4), vom avea

$1 + \dfrac{3a}{a+1} < 1 + \dfrac{300a}{x_i} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a+1} < \dfrac{100a}{x_i} \Leftrightarrow x_i < 100(a+1)$ (adevărat) şi

$1 + \dfrac{300(a+1)}{x_i} < 4 + \dfrac{3}{a} \Leftrightarrow \dfrac{300(a+1)}{x_i} < \dfrac{3(a+1)}{a} \Leftrightarrow x_i > 100a$ (adevărat).

Atunci (5) implică $1 + \dfrac{3a}{a+1} < \dfrac{S}{x_i} < 4 + \dfrac{3}{a}$ (6).

Pentru $a = 1$, (6) devine $\dfrac{5}{2} < \dfrac{S}{x_i} < 7$ (7),

iar pentru $a \geq 2$ rezultă $3 < \dfrac{S}{x_i} < \dfrac{11}{2}$ (8).

Dar între numerele 3 şi $\dfrac{11}{2}$ există numai două numere întregi, ori nouă ne trebuie trei numere $\dfrac{S}{x_i}$.

Aşadar $a = 1$ şi ne uităm la (7). Numerele întregi $\dfrac{S}{x_i}$ sunt în acest caz printre numerele 3, 4, 5 şi 6.

Dar numerele 3 şi 6 nu pot fi ambele câturi de forma $\dfrac{S}{x_i}$ pentru că dacă $\dfrac{S}{x_1} = 3$ şi $\dfrac{S}{x_2} = 6$, atunci $x_1 = \dfrac{S}{3}$, $x_2 = \dfrac{S}{6}$, deci $x_1 = 2x_2$, ceea ce nu se poate căci $100 \leq x_1, x_2 \leq 199$.

Aşadar câturile pot fi fie 3, 4 şi 5, fie 4, 5 şi 6.

În ambele cazuri rezultă că $S$ este divizibil cu 60, adică $S = 60k$, $k \in \mathbb{N}$.

În primul caz, numerele sunt

$$\frac{S}{x_1} = 3 \Leftrightarrow 3x_1 = 60k \Leftrightarrow x_1 = 20k,$$
$$\frac{S}{x_2} = 4 \Leftrightarrow 4x_2 = 60k \Leftrightarrow x_2 = 15k,$$
$$\frac{S}{x_3} = 5 \Leftrightarrow 5x_3 = 60k \Leftrightarrow x_3 = 12k.$$

Din $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60k$ rezultă $x_4 = 13k$.
Singura valoare a lui $k$ pentru care $12k$, $13k$, $15k$ şi $20k$ încep cu cifra 1 este $k = 9$.
În acest caz, numerele sunt 108, 117, 135 şi 180.
În celălalt caz se obţin numerele $10k$, $12k$, $15k$ şi $23k$, dar condiţiile nu sunt satisfăcute pentru nicio valoare a lui $k$ deoarece raportul dintre numerele $23k$ şi $10k$ depăşeşte 2.

**O altă soluţie a problemei 3 (Cazul 2.)**
Să presupunem că există 5 puncte care satisfac condiţiile date. Fie $A$ şi $B$ două din cele cinci puncte. Celelalte puncte trebuie să se afle fie pe cercul de diametru $[AB]$, fie pe perpendicularele în $A$ şi $B$ pe $AB$. Pe fiecare din cele două drepte poate sta cel mult câte unul din cele trei puncte rămase, deci cel puţin un punct trebuie să fie pe cerc. Cel mult patru puncte se pot afla pe cerc (incluzând aici punctele $A$ şi $B$), căci, dacă $X$ şi $Y$ sunt pe cerc, de aceeaşi parte a lui $AB$, atunci $AXY$ nu este dreptunghic. Rezultă că cel puţin un punct este pe drepte.
Dacă $C$ este pe cerc, iar $D$ pe una din drepte, de exemplu pe cea care trece prin $B$, atunci:
- dacă $C$ şi $D$ sunt de aceeaşi parte a lui $AB$ şi $C \in int(\Delta ABD)$, atunci $m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle BCD) = 270°$, deci triunghiurile $BCD$ şi $ACD$ sunt obtuzunghice.
- dacă $C$ şi $D$ sunt de aceeaşi parte a lui $AB$ şi $C \notin int(\Delta ABD)$, atunci $m(\sphericalangle ACD) > m(\sphericalangle ACB) = 90°$, deci triunghiul $ACD$ nu este dreptunghic.
- dacă $C$ şi $D$ sunt de părţi diferite ale lui $AB$, atunci $m(\sphericalangle DBC) > m(\sphericalangle DBA) = 90°$, deci triunghiul $BCD$ nu este dreptunghic.
Prin urmare, oricum ar fi, am arătat că nu există cinci puncte cu proprietatea din enunţ.