BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 12 februarie 2005

Problema 1. Dovediţi că printre oricare 16 numere naturale nenule, diferite, mai mici sau egale cu 100, există patru, a, b, c, d, astfel încât $a + b = c + d$.

Problema 2. Numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ îndeplinesc condiţiile

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \;\; \text{şi} \;\; x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Demonstraţi că printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ există două, al căror produs este mai mic sau egal cu $-\dfrac{1}{n}$.

Problema 3. Fie E un punct oarecare pe mediana $[CD]$ a triunghiului ABC. Cercul K_1, care trece prin punctul E şi este tangent dreptei AB în punctul A, intersectează AC în punctul M. Cercul K_2, care trece prin punctul E şi este tangent dreptei AB în punctul B, intersectează BC în punctul N. Demonstraţi că tangenta în M la K_1 şi tangenta în N la K_2 se intersectează pe mediana $[CD]$.

Problema 4.[1] Dacă pentru numerele întregi a, b, m numărul $N = a^2 + 2mb^2$ este un pătrat perfect, găsiţi soluţiile întregi ale ecuaţiei $x^2 + y^2 = N - mb^2$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

[1] Nu ştiu dacă se pot găsi toate soluţiile ecuaţiei. Problema 1 de la barajul 1 din Serbia, 2009, cere doar găsirea unei soluţii. La fel, soluţia oficială oferă doar ,,nişte soluţii”, nu toate soluţiile.

Soluţii oficiale:

Problema 1. Dovediţi că printre oricare 16 numere naturale nenule, diferite, mai mici sau egale cu 100, există patru, a, b, c, d, astfel încât $a + b = c + d$.
Soluţie:
Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_{16}$ cele 16 numere. Considerăm toate perechile de două din aceste numere şi calculăm diferenţele. Sunt $\binom{15}{2} = 120$ astfel de astfel de perechi. Să notăm cu (x_i, x_j) o pereche cu $x_i > x_j$. Dacă avem două perechi diferite, (x_{i1}, x_{i2}) şi (x_{i3}, x_{i4}), pentru care $x_{i1} - x_{i2} = x_{i3} - x_{i4}$ atunci cvartetul $(a, b, c, d) = (x_{i1}, x_{i4}, x_{i2}, x_{i3})$ îndeplineşte cerinţa problemei cu excepţia cazului în care $x_{i2} = x_{i3}$. Vom spune că x este ,,nepotrivit" pentru perechile (x_{i1}, x) şi (x, x_{i2}) dacă $x_{i1} - x = x - x_{i2}$ (sau $2x = x_{i1} + x_{i2}$). Să observăm că dacă un număr x este ,,dublu nepotrivit", adică este nepotrivit şi pentru perechile (x_{i1}, x) şi (x, x_{i2}) şi pentru perechile (x_{i3}, x) şi (x, x_{i4}), atunci $x_{i1} + x_{i2} = 2x = x_{i3} + x_{i4}$, cu x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4} distincte şi problema este rezolvată.
În sfârşit, presupunem că pentru fiecare a_i există cel mult un cuplu de perechi ,,nepotrivite". Eliminăm una din cele două perechi. Astfel, vom rămâne cu cel puţin $120 - 16 = 104$ perechi şi nu vom mai avea numere nepotrivite. Cum în perechile rămase diferenţele pot lua valori între 1 şi 99 şi avem 104 perechi, conform principiului cutiei, vor exista cel puţin două perechi disjuncte cu aceeaşi diferenţă. Dacă $x_{i1} - x_{i2} = x_{i3} - x_{i4}$, atunci $(a, b, c, d) = (x_{i1}, x_{i4}, x_{i2}, x_{i3})$ satisface concluzia problemei.

Problema 2. Numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ îndeplinesc condiţiile

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \ \text{ şi } \ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

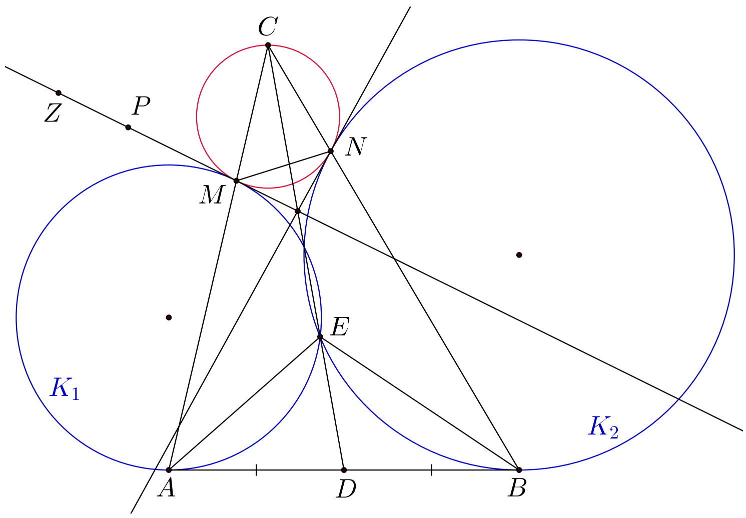
Demonstraţi că există două printre numere două, al căror produs este mai mic sau egal cu $-\dfrac{1}{n}$.
Soluţie:[2]
Fie $\alpha = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi $\beta = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Considerăm funcţia de gradul II $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ care are rădăcinile α şi β. Deoarece $\alpha \leq x_i \leq \beta$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$, avem $f(x_i) \leq 0$ pentru orice i, adică $x_i^2 - (\alpha + \beta)x_i + \alpha\beta \leq 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Adunând aceste inegalităţi se obţine $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - (\alpha + \beta)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n\alpha\beta \leq 0$. Ţinând cont de relaţiile $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ şi $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ ajungem la $1 + n\alpha\beta \leq 0$, adică la $\alpha\beta \leq -\dfrac{1}{n}$.

[2] O altă soluţie poate fi găsită în cartea lui *Marius Ghergu*, Probleme pentru pregătirea Olimpiadelor de Matematică, clasele VI-VIII, Editura GIL, 2004, problema 72, soluţia la pagina 101.

Problema 3. Fie E un punct oarecare pe mediana $[CD]$ a triunghiului ABC. Cercul K_1, care trece prin punctul E şi este tangent dreptei AB în punctul A, intersectează AC în punctul M. Cercul K_2, care trece prin punctul E şi este tangent dreptei AB în punctul B, intersectează BC în punctul N. Demonstraţi că tangenta în M la K_1 şi tangenta în N la K_2 se intersectează pe mediana $[CD]$.

Soluţie:

Deoarece DA şi DB sunt tangente cercurilor K_1 şi K_2, puterea punctului D faţă de cele două cercuri este DA^2, respectiv DB^2. Cum $DA = DB$, punctul D se află pe axa radicală a celor două cercuri. Deoarece punctul E aparţine şi el axei radicale, iar C este situat pe axa radicală DE, rezultă că CD este axa radicală a cercurilor K_1 şi K_2. Calculând puterea lui C faţă de cele două cercuri, obţinem că $CM \cdot CA = CN \cdot CB$. Rezultă de aici că patrulaterul $MNBA$ este inscriptibil. Dacă MZ şi MP sunt tangentele la cercul K_1 şi la cercul circumscris triunghiului CMN, atunci avem: $\sphericalangle CMP \equiv \sphericalangle CNM \equiv \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle CMZ$, astfel că tangentele MZ şi MP coincid. Atunci cercul circumscris triunghiului CMN şi cercul K_1 sunt tangente în M, iar MP este axa lor radicală. În mod similar, tangenta în N la cercul circumscris triunghiului CMN este axa radicală a cercurilor K_2 şi a cercului circumscris triunghiului CMN, astfel că cele trei axe radicale sunt concurente (în centrul radical al celor trei cercuri).



Problema 4. Dacă pentru numerele întregi a, b, m numărul $N = a^2 + 2mb^2$ este un pătrat perfect, găsiţi soluţiile întregi ale ecuaţiei $x^2 + y^2 = N - mb^2$.

Soluţie:

Fie $k^2 = a^2 + mb^2$. Observăm că:

- dacă a este impar, atunci şi k este impar şi
- dacă a este par, atunci şi k este par.

Al doilea membru al ecuaţiei devine atunci:

$N - mb^2 = a^2 + mb^2 = k^2 - mb^2 = \dfrac{(a^2+mb^2)+(k^2-mb^2)}{2} = \dfrac{a^2+k^2}{2} = \dfrac{(a+k)^2+(a-k)^2}{4} = \left(\dfrac{a+k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-k}{2}\right)^2$.

Conform observaţiilor de mai sus, numerele $\dfrac{a+k}{2}$ şi $\dfrac{a-k}{2}$ sunt întregi, astfel că perechile $\left(\pm\dfrac{a+k}{2}, \pm\dfrac{a-k}{2}\right)$ şi $\left(\pm\dfrac{a-k}{2}, \pm\dfrac{a+k}{2}\right)$ (toate combinaţiile de semne) sunt soluţii ale ecuaţiei date.