Faza I: a OM din 12 dec.2015-SERBIA:

Cercul înscris în triunghiul ABC, cu: $|AB|<|AC|$, este tangent la laturile $[BC],[AC]$ şi $[AB]$, în mod respectiv în punctele D,E şi F. Notăm cu M şi N, punctele de intersecţie ale bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$, cu dreptele DE şi DF; iar cu $K-$piciorul înălţimii duse din vârful A. Demonstraţi că punctul $D-$este centrul cercului ínscris ín triunghiul KMN.

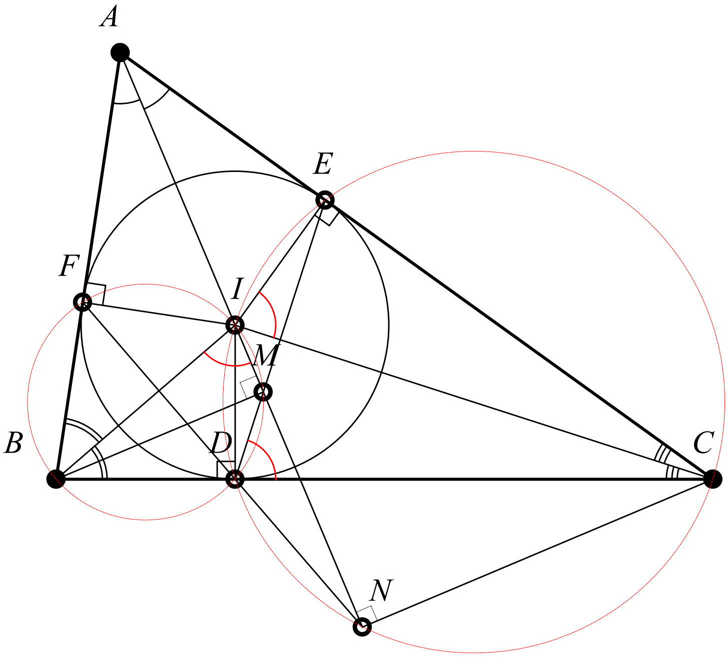


Fig.1.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):

I. Voi arăta mai întâi, că: $BM,CN\perp AI$ ($I-$fiind centrul cercului înscris) (v.Fig.1).

Într-adevăr, notând cu: $\alpha=m\left(\widehat{IAB}\right)=m\left(\widehat{IAC}\right)$, $\beta=m\left(\widehat{IBA}\right)=m\left(\widehat{IBC}\right)$ şi cu: $\gamma=m\left(\widehat{ICB}\right)=m\left(\widehat{ICA}\right)$, avem: $\alpha+\beta+\gamma=90^0$. (1)

Ţinând acum seama de relaţia (1), din triunghiul ICE, dreptunghic în E, obţinem că:

$$m\left(\widehat{EIC}\right)=90^0-m\left(\widehat{ICA}\right)=90^0-\gamma=\alpha+\beta;$$

aşa că, din:

$$\left.\begin{array}{l}IE\perp AC\\ ID\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{IEC}\equiv\widehat{DIC}\left(=90^0\right)\Rightarrow IDCE-inscriptibil\Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{EDC}\right)}=m\left(\widehat{EIC}\right)=\boxed{\alpha+\beta}. \quad (2)$$

Pe de altă parte, $\widehat{MIB}-$fiind un unghi exterior al ΔIAB, avem:

$$\boxed{m\left(\widehat{MIB}\right)}=m\left(\widehat{IAB}\right)+m\left(\widehat{IBA}\right)=\boxed{\alpha+\beta}. \quad (3)$$

Din relaţiile (2) şi (3), rezultă că:

$$\widehat{EDC}\equiv\widehat{MIB}\Rightarrow IBDM-inscriptibil\Rightarrow m\left(\widehat{IMB}\right)=m\left(\widehat{IDB}\right)=90^0\Rightarrow\boxed{BM\perp AI}. \quad (4)$$

În mod analog se arată că: $CN\perp AI$. (5)

II. Voi arăta acum că: $\Delta KMN \sim \Delta ABC$ **(v.Fig.2).** Avem:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} AK \perp BC \\ BM \perp AI;(4) \end{array}\right\} \Rightarrow ABKM - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{KMN}\right) = m\left(\widehat{ABC}\right) = 2\beta;(6) \\ \left.\begin{array}{r} AK \perp BC \\ CN \perp AI;(5) \end{array}\right\} \Rightarrow AKNC - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{KNM}\right) = m\left(\widehat{BCA}\right) = 2\gamma;(7) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KMN \sim \Delta ABC.$$

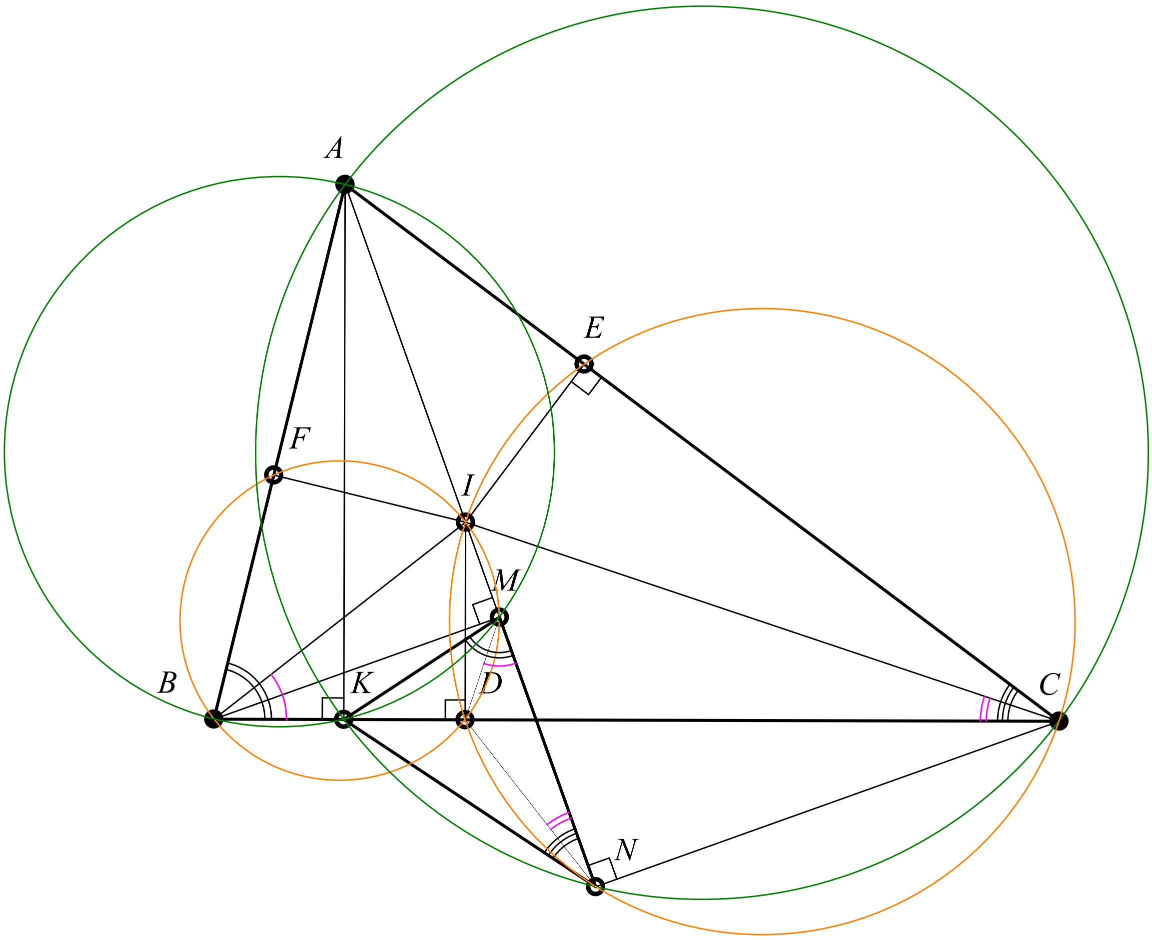


Fig.2.

III. În fine, voi arăta că $(MD$ **şi** $(ND -$ **sunt bisectoare în** ΔKMN!

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} ID \perp BC \\ BM \perp AI \end{array}\right\} \Rightarrow BDMI - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{DMN}\right) = m\left(\widehat{IBC}\right) = \beta \\ m\left(\widehat{KMN}\right) = 2\beta;(6) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (MD - \text{este bisectoarea } \widehat{KMN}.$$

În mod analog se artată că $(ND -$ este bisectoarea $\widehat{KNM}$. ■

* * *

Soluția de mai sus este foarte ingenioasă. Dacă vă puneți întrebarea „dar oare cum o fi intuit autorul ei că BM și CN sunt perpendiculare pe AI ?", răspunsul îl găsiți în rezolvarea lui Vlad Vergelea care a pornit invers, dinspre concluzie către ipoteză, deducând succesiv faptele pe care le are de demonstrat.

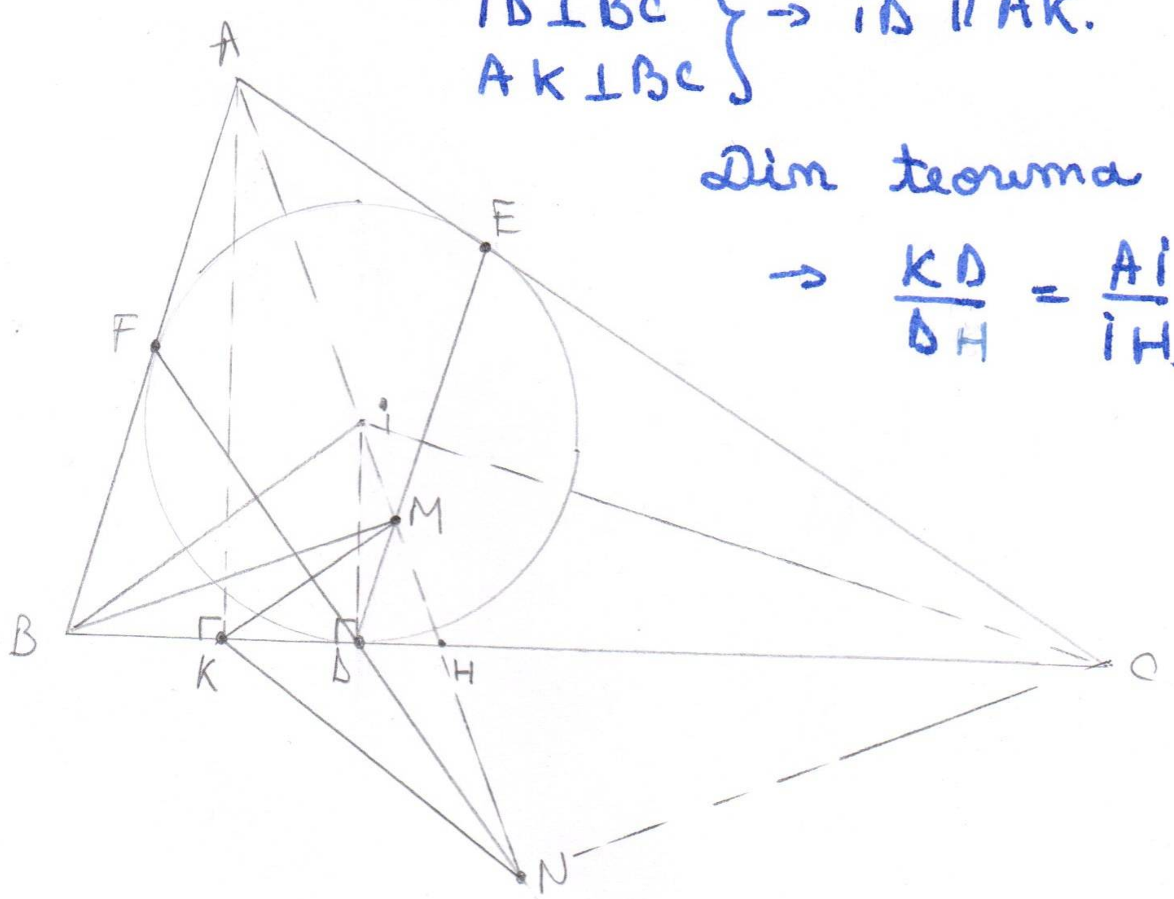
Problema săptămânii 24.

Cercul înscris în triunghiul ABC cu $AB < AC$ este tangent la laturile $[BC]$, $[AC]$ şi $[AB]$ în mod respectiv în punctele D, E şi F. Notăm cu M şi N punctele de intersecţie ale bisectoarei unghiului $\sphericalangle BAC$ cu dreptele DE şi DF, iar cu K piciorul înălţimii duse din vârful A. Demonstraţi că punctul D este centrul cercului înscris în triunghiul KMN.

Problema a fost selectată de *Mihai Miculiţa*. Îi mulţumesc pe această cale pentru ajutorul constant pe care ni-l acordă.

Fie $AN \cap BC = \{H\}$.

$$\left.\begin{array}{l} iD \perp BC \\ AK \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow iD \parallel AK.$$



Din teorema lui Thales $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{KD}{DH} = \frac{Ai}{iH} \quad (1)$$

În ΔABH, $(Bi$ este bisectoare, iar din aceasta şi teorema bisectoarei rezultă că $\frac{Ai}{iH} = \frac{AB}{BH}$. (2)

Atunci din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\frac{KD}{DH} = \frac{AB}{BH}$. Pentru a demonstra că $(MD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{KMH}$ trebuie să demonstra că $\frac{KD}{DH} = \frac{KM}{MH}$.

Astfel, îmi rămâne să demonstrez că

$\frac{KM}{MH} = \frac{AB}{BH}$. Cum $\widehat{AHB} \equiv \widehat{KHM}$, îmi rămâne să demonstrez că $\triangle ABH \sim \triangle KMH$, adică $\widehat{KMH} \equiv \widehat{ABH}$, adică $ABKM$ patrulater inscriptibil

Cum $\widehat{AKB} = 90°$, trebuie să demonstrez că $\widehat{IMB} = 90°$.

Dar $\widehat{IDB} = 90° \to$ Trebuie să demonstrez că $IBDM$ este patrulater inscriptibil, adică $\widehat{IBC} = \widehat{AMB} = \widehat{DEC} - \widehat{MAC}$.

Fie $\widehat{BAC} = 2A°$
$\widehat{ABC} = 2B°$
$\widehat{ACB} = 2C°$.

Cum CE și DE tangente la cercul înscris în $\triangle ABC \to CE = DE$

$\to \widehat{DEC} = 90° - C° = A° + B°$.

Dar $\widehat{MAC} = A°$

$\to \widehat{DEC} - \widehat{MAC} = B° = \widehat{IBD}$, adică cea ce trebuia demonstrat.

$\to$ $(MD$ este bisectoarea $\widehat{KMN}$. (3)

Demonstrez că $(ND$ este bisectoarea $\widehat{KNM}$.
Aceasta este echivalentă cu $\frac{KN}{NH} = \frac{KD}{DH}$, dar

$\frac{KD}{DH} = \frac{AI}{IH} = \frac{AC}{CH}$

Cum $\widehat{KHN} = \widehat{AHC}$, trebuie să demonstrez că $\triangle ACH \sim \triangle KNH$.

→ Îmi rămâne să demonstrez că $\widehat{NKC} = \widehat{NAC}$, adică AKNC patrulater inscriptibil, iar cum $\widehat{AKC} = 90°$, trebuie să demonstrez că $\widehat{ANC} = 90°$.
Dar $\widehat{IDC} = 90° \rightarrow$ Trebuie să demonstrez că IDNC este un patrulater inscriptibil, adică

$\widehat{IND} = \widehat{ICB} = C°. \Leftrightarrow \widehat{BFD} - \widehat{BAN} = \hat{C}° \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \widehat{BFD} = \hat{A} + C°$

Cum $BF = BD \rightarrow \widehat{BFD} = \dfrac{180° - \widehat{FBD}}{2} = 90° - \hat{B}° =$
$= \hat{A}° + \hat{C}°$,
adică ceea ce trebuia demonstrat.

→ CND bisectoarea $\widehat{KNM}$. (4)

Din relațiile (3) și (4) rezultă concluzia

q.e.d.