Problema săptămânii 53
Fie a, b, c numere reale pozitive cu proprietatea

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Demonstraţi că

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Problem of the week no. 53
Let a, b, c be positive real numbers such that

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Prove that

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Soluţia 1:
Condiţia din enunţ poate fi scrisă sub oricare din următoarele forme echivalente:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1 \Leftrightarrow abc=a+b+c+2.$$

Este bine cunoscut şi util de reţinut că putem în acest caz decondiţiona inegalitatea punând $a=\dfrac{y+z}{x}$, $b=\dfrac{z+x}{y}$, $c=\dfrac{x+y}{z}$.
Cu alte cuvinte, se poate demonstra că dacă $a, b, c>0$ satisfac restricţia din enunţ, atunci există $x, y, z>0$ astfel încât $a=\dfrac{y+z}{x}$, $b=\dfrac{z+x}{y}$, $c=\dfrac{x+y}{z}$.

Făcând această substituţie, inegalitatea din enunţ revine la a demonstra că, pentru orice $x, y, z>0$, are loc inegalitatea

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{x+z}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right).$$

Vom prezenta în continuare două demonstraţii ale acesteia, ambele preluate de pe AoPS (a se vedea linkul de mai jos).

Soluţia 1.1: (user mahanmath)

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{x+z}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\sqrt{\frac{y+z}{2x}}-\sqrt{\frac{2x}{y+z}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum\left(\frac{y+z-2x}{\sqrt{x(y+z)}}\right) \geq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum \left(\frac{y-x}{\sqrt{x(y+z)}} + \frac{x-y}{\sqrt{y(x+z)}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum \left((x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}} - \frac{1}{\sqrt{x(y+z)}} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum \left(\frac{z(x-y)^2}{\left[\sqrt{y(z+x)} + \sqrt{x(y+z)}\right] \sqrt{xy(z+x)(z+y)}} \right) \geq 0$$

(nu era nevoie să împartă cu $\sqrt{2}$, mergea la fel şi direct)

Soluţia 1.2: (user George-A)
Substituind $r = \sqrt{x},\ s = \sqrt{y},\ t = \sqrt{z}$ şi folosind atât la numărători cât şi la numitori că $\sqrt{r^2 + s^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(r+s)$, rezultă că este suficient să demonstrăm că

$$\sum \frac{r+s}{t} \geq 4 \sum \frac{r}{s+t}.$$

Şi această inegalitate este una clasică (îi aparţine lui *Mircea Lascu* şi apare şi în cartea *Old and New Inequalities*, pb. 39, pag. 12).
O demonstraţie simplă: avem $\frac{1}{s+t} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)$ (din medii, CBS sau reducând-o la $(r-s)^2 \geq 0$), deci $\frac{r}{s+t} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{r}{s} + \frac{r}{t}\right)$. Adunând cu cele două inegalităţi analoage obţinem concluzia.

Soluţia 2: O altă soluţie la această problemă, precum şi la una asemănătoare (problema 27272 din GM nr. 9/2016), ambele date de Marian Cucoaneş, puteţi găsi la finalul acestui material.

Comentariu:
În aparenţa, cheia rezolvării acestei probleme a stat în cunoaşterea substituţiei care se face de obicei pentru această condiţie.
În realitate, trucul poate fi descoperit destul de natural:
Am dori să avem o condiţie mai obişnuită, de exemplu $x+y+z=1$. În acest scop notăm $\frac{1}{1+a} = x$ (şi atunci condiţia revine la $x+y+z=1$).
Explicităm a în funcţie de x pentru a înlocui în inegalitate.
Avem $\frac{1}{1+a} = x \Leftrightarrow a = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}$.
În cartea *Old and New Inequalities* apar şi alte inegalităţi condiţionate de aceeaşi restricţie:
pb. 49 Dacă $a,b,c > 0$ verifică $a+b+c+2 = abc$, atunci $ab+bc+ca \geq 2(a+b+c)$

şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \frac{3}{2}\sqrt{abc}$.

De asemenea, condiţia $xy+yz+zx+2xyz=1$ revine, notând $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ la $a+b+c+2=abc$ la care se face substituţia de mai sus.

Un alt exemplu din cartea mai sus pomenită (pb. 41)

Dacă $x,y,z>0$ satisfac $xy+yz+zx+2xyz=1$, demonstraţi că:

a) $xyz \le \frac{1}{8}$;

b) $x+y+z \ge \frac{3}{2}$;

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 4(x+y+z)$;

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-4(x+y+z) \ge \frac{(2m-1)^2}{m(2m+1)}$, unde $m=\max\{x,y,z\}$.

English Solutions are available on AoPS

BIBLIOGRAFIE

T. Andreescu, G. Dospinescu, V. Cîrtoaje, M. Lascu – *Old and New Inequalities*, Ed. GIL, 2004

Problema săptămânii 53

Fie a, b, c numere reale pozitive cu proprietatea

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Demonstrați că

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\geq\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Problem of the week no. 53

Let a, b, c be positive real numbers such that

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Prove that

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\geq\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Soluție (Marian Cucoaneș)

Se arată ușor următoarele echivalențe

$abc=a+b+c+2 \iff \sum\frac{1}{a+1}=1 \iff \sum\frac{a}{a+1}=2$

Atunci: $\frac{c}{c+1}=1-\frac{1}{c+1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \Rightarrow c=$
$=\frac{c+1}{a+1}+\frac{c+1}{b+1} \Rightarrow c-2=\frac{c+1}{a+1}-1+\frac{c+1}{b+1}-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow c-2=\frac{c-a}{a+1}+\frac{c-b}{b+1}$ (1). Analog, obținem:
$b-2=\frac{b-a}{a+1}+\frac{b-c}{c+1}$ (2) și $a-2=\frac{a-b}{b+1}+\frac{a-c}{c+1}$ (3)

Presupunem prin reducere la absurd că:
$ab\leq 1 \Rightarrow abc\leq c$ și cum $abc=a+b+c+$
$+2 \Rightarrow a+b+c+2\leq c \Rightarrow a+b+2\leq 0$ fals

Deci, $ab>1$ și analog $ac>1$ și $bc>1$

Inegalitatea din enunț se scrie sub următoarea formă echivalentă:

$$\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{2}-\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{\sqrt{c}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a-2}{2\sqrt{a}}+\frac{b-2}{2\sqrt{b}}+\frac{c-2}{2\sqrt{c}}\geq 0 \Leftrightarrow$$ (datorită egalităților 1; 2 și 3) $\Leftrightarrow$

$$\frac{(a-b)}{(b+1)\sqrt{a}}+\frac{(a-c)}{(c+1)\sqrt{a}}+\frac{b-a}{(a+1)\sqrt{b}}+\frac{b-c}{(c+1)\sqrt{b}}+$$

$$+\frac{c-a}{(a+1)\sqrt{c}}+\frac{c-b}{(b+1)\sqrt{c}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{1}{(b+1)\sqrt{a}}-\frac{1}{(a+1)\sqrt{b}}\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2\cdot(ab-1)}{(a+1)(b+1)\sqrt{ab}\cdot[(a+1)\sqrt{b}+(b+1)\sqrt{a}]}\geq 0$$

Această din urmă inegalitate este evidentă.

Problema 27272 / GM 9/2016

Fie a, b, c numere reale pozitive cu $a b \cdot c = a+b+c+2$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$$

Marian Cucoaneș, Mărășești, Vrancea

<u>Soluție</u> (Marian Cucoaneș)

Se arată ușor următoarele echivalențe:

$$abc = a+b+c+2 \iff \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} = 1 \iff \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=2$$

Atunci: $\frac{c}{c+1} = 1 - \frac{1}{c+1} = \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \frac{c+1}{a+1}+\frac{c+1}{b+1} \Rightarrow c-2 = \frac{c+1}{a+1}-1+\frac{c+1}{b+1}-1 \Rightarrow c-2 = \frac{c-a}{a+1}+\frac{c-b}{b+1} \quad (1)$$

Analog se obțin egalitățile:

$$b-2 = \frac{b-a}{a+1}+\frac{b-c}{c+1} \quad (2) \text{ și } a-2 = \frac{a-b}{b+1}+\frac{a-c}{c+1} \quad (3)$$

Presupunem prin reducere la absurd că $ab \leq 1 \Rightarrow abc \leq c$ și cum $abc = a+b+c+2 \Rightarrow a+b+c+2 \leq c \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+2 \leq 0$ fals.

Deci; $ab>1$ și analog $ac>1$ și $bc>1$

Inegalitatea din enunț este echivalentă

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a-2}{2\sqrt[3]{a}}+\frac{b-2}{2\sqrt[3]{b}}+\frac{c-2}{2\sqrt[3]{c}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

(datorită egalităților (1); (2) și (3)) $\Leftrightarrow$

$$\frac{a-b}{(b+1)\sqrt[3]{a}}+\frac{a-c}{\sqrt[3]{a}(c+1)}+\frac{b-a}{(a+1)\sqrt[3]{b}}+\frac{b-c}{(c+1)\sqrt[3]{b}}+$$

$$+\frac{c-a}{(a+1)\sqrt[3]{c}}+\frac{c-b}{(b+1)\sqrt[3]{c}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{1}{(b+1)\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{(a+1)\sqrt[3]{b}}\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2\cdot[ab(a+b)+3ab-1]}{(b+1)(a+1)\sqrt[3]{ab}\cdot[(b+1)^2\sqrt[3]{a^2}+(b+1)(a+1)\sqrt[3]{ab}+(a+1)^2\sqrt[3]{b^2}]}\geq$$

≥ 0. Această din urmă ineg este evidentă