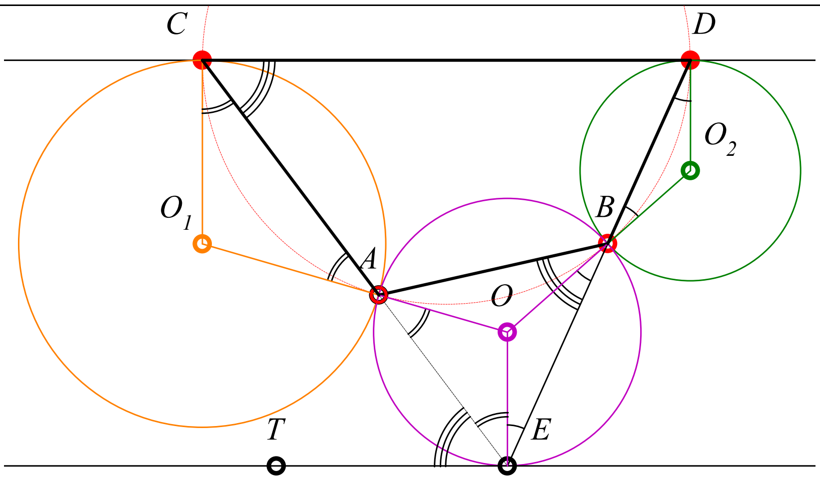
Problema săptămânii 1:

Fie (O_1) şi (O_2) două cercuri tangente exterior unui al treilea cerc (O); punctele de tangenţă fiind A şi respectiv B. Fie C şi D puncte pe cercul (O_1) şi respectiv (O_2), astfel încât dreapta CD să fie tangenta exterioară comună a celor două cercuri. Notăm cu $\{E\} = AC \cap BD$. Arătaţi că punctul E se găseşte pe cercul (O) şi tangenta în punctul E la cercul (O) este paralelă cu dreapta CD. (v.Fig).



SOLUŢIE(*Mihai Miculiţa*, profesor-ORADEA):

Notând cu $E-$ cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei BD cu cercul (O), avem:

$$\left.\begin{aligned} B;D\in(O_2)\Rightarrow[O_2B]\equiv[O_2D]\Rightarrow\widehat{O_2DB}\equiv\underline{\widehat{O_2BD}}\\ [OO_2]\cap[DE]\Rightarrow\underline{\widehat{O_2BD}}\equiv\underline{\underline{\widehat{OBE}}}\\ B;E\in(O)\Rightarrow\underline{\underline{\widehat{OBE}}}\equiv\widehat{OEB}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\widehat{O_2DB}\equiv\widehat{OEB}\Rightarrow O_2D\parallel OE;\quad(1)$$

iar, din: $CD\cap(O_2)=\{D\}\Rightarrow O_2D\perp CD;$ (2) şi $CD\cap(O_1)=\{C\}\Rightarrow O_2C\perp CD.$ (3)

Din relaţiile (1), (2) şi (3), rezultă că: $OE\parallel O_2D\parallel O_1C;$ (4) şi $OE\perp CD.$ (5)

În continuare, avem:

$$\left.\begin{aligned} A;E\in(O)\Rightarrow[OA]\equiv[OE]\Rightarrow\widehat{OAE}\equiv\underline{\widehat{OEA}}\\ OE\parallel O_1C\ (4)\Rightarrow\underline{\widehat{OEA}}\equiv\underline{\underline{\widehat{ACO_1}}}\\ A;C\in(O_1)\Rightarrow[O_1C]\equiv[O_1A]\Rightarrow\underline{\underline{\widehat{ACO_1}}}\equiv\widehat{CAO_1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\widehat{OAE}\equiv\widehat{CAO_1}\ \text{ şi atunci,}$$

întrucât: $A\in[CE]\Rightarrow E\in AC;$ aşa că: $AC\cap BD=\{E\}.$ ■

În fine, dacă $T-$ este un punct arbitrar al tangentei în E la cercul (O), astfel încât punctele T şi B să fie de a parte şi de alta a dreptei $OE;$ atunci din: $ET\cap(O)=\{E\}\Rightarrow TE\perp OE.$ (6)

Aşa că din relaţiile (5) şi (6), obţinem că: $TE\parallel CD.$ ■

OBSERVAŢII:

1). O altă proprietate a configuraţiei acestei probleme este că: **patrulaterul $ABDC-$ este un patrulater inscriptibil!**

Într-adevăr, din:

$$\left.\begin{aligned} TE\cap(O)=\{E\}\Rightarrow\widehat{ABE}\equiv\underline{\widehat{AET}}\\ CD\parallel TE\Rightarrow\underline{\widehat{AET}}\equiv\widehat{ACD}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\widehat{ABE}\equiv\widehat{ACD}\Rightarrow ABDC-inscriptibil.\ ■$$

2). Are loc şi următoarea reciprocă (folosind notaţiile din problema iniţială):
Fie ECD un triunghi oarecare. Un cerc arbitrar care trece prin vârfurile C şi $D,$ intersectează a doua oară laturile (CE) şi (DE) în punctele A şi respectiv $B.$ Fie acum $(O_1)-$ cercul care trece prin punctul A şi care este tangent în $C,$ la dreapta $CD;$ iar $(O_2)-$ cercul care trece prin punctul B şi care este tangent în $D,$ la dreapta $CD.$ Arătaţi că cercul circumscris triunghiului ABE este tangent la cercurile (O_1) şi $(O_2).$

***