A 12-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ PENTRU JUNIORI

prezentare de **Mircea Fianu** şi **Dinu Şerbănescu**

Abstract. This is a report on the 12^{th} Junior Balcan Mathematical Olympiad, held in Vlora, Albania, in the period June 23^{rd} – June 28^{th} 2008. The paper presents the complete solutions of the given problems and the results of the Romanian team.

Competiţia s-a desfăşurat în Albania, la Vlora, în perioada 23-28 iunie 2008. Au participat cele 11 ţări membre (Albania, Bosnia şi Herţegovina, Bulgaria, Cipru, Grecia, Macedonia, Moldova, Muntenegru, România, Serbia şi Turcia) şi o ţară cu statut de invitat, Kazachstan. Echipa României a fost formată din 6 elevi: *Radu Bumbăcea, Andrei Alexandru Milu, Ştefan Ivanovici, Alexandru Muntean, Omer Cerrahoglu, Dan Dănăilă*, şi condusă de profesorii *Dinu Şerbănescu* şi *Mircea Fianu*. Într-un interval de 4 ore şi 30 de minute, elevilor li s-au propus spre rezolvare 4 probleme:

1. Să se determine numerele reale a, b, c, d astfel încât $a+b+c+d=20$ şi $ab+ac+ad+bc+bd+cd=150$.

2. Vârfurile A şi B ale unui triunghi echilateral ABC aparţin cercului k de rază 1, iar vârful C este interior cercului k. Un punct D, diferit de B, aparţine cercului k astfel încât $AB=AD$. Dreapta DC retaie cercul k în punctul E. Să se calculeze lungimea segmentului CE.

3. Să se determine numerele prime p, q şi r cu proprietatea că:

$$\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1.$$

4. Considerăm o tablă 4×4, împărţită în 16 pătrate unitate, iniţial colorate în alb. Două pătrate unitate se numesc *vecine* dacă au o latură comună. O *mutare* constă în alegerea unui pătrat unitate şi schimbarea culorii sale **şi** a vecinilor săi în negru, dacă erau colorate în alb, şi în alb, dacă erau colorate în negru. Să se determine valorile posibile ale lui n pentru care există o secvenţă de n mutări după care toate cele 16 pătrate unitate devin colorate în negru.

În opinia noastră, nivelul de dificultate al problemelor nu a fost ridicat, comparaţia fiind făcută cu ediţiile anterioare. Prezentăm soluţiile complete ale problemelor:

1. Avem $a^2+b^2+c^2+d^2 = (a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 400-300 = 100$ şi $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 = 3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 300-300 = 0$. De aici $a=b=c=d$ şi cum $a+b+c+d=20$ obţinem $a=b=c=d=5$.

2. Fie F intersecţia cercului cu semidreapta AC. Din construcţie, triunghiul ACD este isoscel în A, deci $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$, de unde $\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE}$. Conform ipotezei, arcele AB şi AD sunt egale, deci şi arcele BE şi EF sunt egale. Atunci AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$, deci AE este mediatoarea segmentului BC. Rezultă $BE = CE$, şi cum $\overset{\frown}{BE} = 2 \cdot \sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC = 60^\circ$, obţinem $CE = 1$.

3. Este evident că $p > q$ şi $r = \dfrac{4q}{p-q} - 1$. Cum q şi $p-q$ sunt prime între ele, avem $p-q \mid 4$. Distingem cazurile:

a) $p-q=1$. Atunci $p=3, q=2$ şi apoi $r=7$, toate numerele fiind prime.

b) $p-q=2$. Atunci $p=q+2$ şi $r=2q-1$. Dacă $q \equiv 1 \pmod 3$, atunci 3 divide p, de unde $p=3$ şi apoi $q=1$, fals. Dacă $q \equiv 2 \pmod 3$, atunci 3 divide r, de unde $r=3$ şi apoi $q=2, p=4$, fals. Rămâne doar $q=3$, de unde $p=r=5$.

c) $p-q=4$. Avem $p=q+4, r=q-1$, de unde $r=2, q=3, p=7$, toate numerele fiind prime.

În concluzie $(p,q,r)=(3,2,7),(5,3,5),(7,3,2)$.

4. (După rezolvarea dată de *Omer Cerrahoglu*). Numerotăm coloanele cu 1, 2, 3, 4, liniile cu a, b, c, d, iar pătratele le indicăm prin perechi: $a1$, $a2$, $a3, \ldots, d4$. Configuraţia următoarelor 4 pătrate este esenţială:

$$a2, b4, c1, d3.$$

Selectate exact o dată, tabla devine neagră, deci $n=4$ convine. Mai mult, $n=4$ este valoarea minimă, deoarece o mutare schimbă culoarea a cel mult 5 pătrate, iar noi avem nevoie de 16 schimbări de culoare.

Observăm că 2 mutări succesive ce selectează acelaşi pătrat unitate nu modifică starea, deci după obţinerea tablei negre în patru mutări vom putea obţine cerinţa în orice număr par n de mutări $n \geq 4$.

Rămâne să arătăm că acestea sunt toate valorile posibile, adică pentru $n>3$ impar, nu există n mutări ce realizează o tablă complet neagră. Considerăm o secvenţă de n mutări în condiţiile problemei. Notăm cu $A_1, A_2, \ldots, D_4$ numărul de mutări în care au fost selectate pătratele $a1$, $a2, \ldots, d4$, respectiv. Evident:

$$n=A_1+A_2+\ldots+D_4.$$

Deoarece culoarea pătratului $a2$ este în final neagră, iar iniţial a fost albă, au existat un număr impar de schimbări de culoare, deci un număr impar de mutări efectuate cu el sau cu vecinii săi, anume $a1, a2, a3, b2$.

Aşadar, numărul $s_1 = A_1 + A_2 + A_3 + B_2$ este impar. Repetând raţionamentul pentru pătratele $b4, c1, d3$, deducem că şi sumele:

$$s_2 = A_4 + B_3 + B_4 + C_4,$$
$$s_3 = B_1 + C_1 + C_2 + D_1,$$
$$s_4 = C_3 + D_2 + D_3 + D_4$$

sunt impare. Atunci $n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ este suma a 4 numere impare, deci în mod necesar n este par.

Echipa României a câştigat competiţia cu un total de 215 puncte, obţinând medaliile de aur prin *Radu Bumbăcea* şi *Omer Cerrahoglu* – ambii cu punctaj maxim, anume 40 de puncte – şi încă patru medalii de argint prin ceilalţi participanţi. *Radu Bumbăcea* obţine a doua medalie de aur – din nou cu punctaj maxim – la această competiţie, după cea din 2007 din Bulgaria. Menţionăm rezultatul obţinut de *Omer Cerrahoglu*, acesta fiind elev în clasa a VI-a, ceilalţi cinci absolvind clasa a VIII-a. În urma echipei noastre s-au clasat Turcia (cu 208 puncte), Bulgaria (200) şi Serbia (199).

Mulţumim celor ce au contribuit la acest rezultat frumos al elevilor noştri.

Profesor,
Bucureşti

Profesor,
Bucureşti