Problema săptămânii 55
Într-un triunghi ABC, dreptunghic în A, notăm cu D piciorul înălţimii duse din vârful A, iar cu I, J si K centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD şi respectiv ACD. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului IJK se găseşte pe ipotenuza $[BC]$.

Crux Mathematicorum, nr. 2/2017, pb. OC316

Problem of the week no. 55
Let ABC be a triangle with $\angle A = 90°$, D the foot of the altitude from A, and I, J, and K the incenters of triangles ABC, ABD, and ACD, respectively. Prove that the circumcenter of triangle IJK lies on the hypotenuse $[BC]$.

Crux Mathematicorum, no. 2/2017, pb. OC316

Soluţii:
Am primit multe rezolvari. Problema este destul de uşoară. Am ales-o mai mult pentru universul ei bogat. Din soluţiile de mai jos se desprind diverse fapte, folosite sau nu pentru rezolvarea problemei.

Prima soluţie este de la *Vlad Vergelea*. Soluţii asemănătoare am primit şi de la *Marian Daniel Vasile* şi de la *Ioana Popescu*.
Cea de-a doua soluţie mi-a fost trimisă de *Cristian Mangra*.
Al treilea fişier inclus prezintă soluţiile lui *Mihai Miculiţa* şi *Titu Zvonaru*.

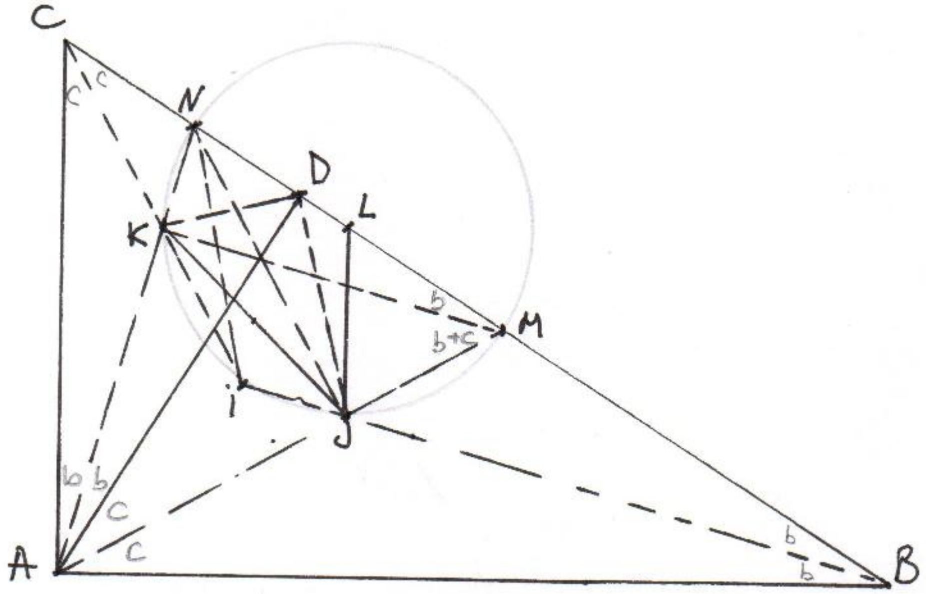
Prima soluţie consideră M şi N intersecţiile dreptelor AJ şi AK cu BC şi arată că I este centrul cercului circumscris lui AMN. Atunci $m(\sphericalangle MIN) = 2m(\sphericalangle MAN) = 90°$. În triunghiul AMN, MK şi NJ sunt înălţimi (deci se taie pe AD). Rezultă că J şi K sunt pe cercul de diametru $[MN]$.
Rezultă şi că patrulaterele $KIJN$ şi $KIJM$ sunt trapeze isoscele.
$DLKJ$ este inscriptibil (înscris în cercul lui Euler al lui AMN).

Soluţia a doua consideră E proiecţia lui I pe BC şi arată (fapt util de reţinut) că triunghiul JEK este dreptunghic isoscel, apoi că centrul cercului circumscris lui IJK este chiar E.

Din soluţia a treia mai aflăm (cu notaţiile de mai sus) că $EK \perp AC$ şi $EJ \perp AB$, adică proiecţia lui I pe BC, centrul cercului înscris în triunghiul ABD şi punctul de contact al acestuia cu AB sunt coliniare. (Acest lucru se putea arăta şi proiectând J pe AD, cu calcul de unghiuri)

Problema săptămânii 55
Într-un triunghi ABC, dreptunghic în A, notăm cu D piciorul înălţimii duse din vârful A, iar cu I, J si K centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD şi respectiv ACD. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului IJK se găseşte pe ipotenuza $[BC]$.

Problem of the week no. 55
Let ABC be a triangle with $\angle A = 90°$, D the foot of the altitude from A, and I, J, and K the incenters of triangles ABC, ABD, and ACD, respectively. Prove that the circumcenter of triangle IJK lies on the hypotenuse $[BC]$.



Fie $AJ \cap BC = \{M\}$, $AK \cap BC = \{N\}$
Notez $\widehat{ACK} = c°$, $\widehat{ABJ} = b°$
Atunci $\widehat{DAN} = b°$, $\widehat{DAM} = c°$ $\to \widehat{CAM} = 2b+c° = \widehat{CMA}$

$\left.\begin{array}{l} \to CA = CM \\ \text{Dar } \widehat{ACK} \equiv \widehat{MCK} \end{array}\right\} \to \Delta ACK \equiv \Delta MCK.$ $\left.\begin{array}{l} \to MK = KA \\ \text{Dar } \widehat{KAM} = 45° \end{array}\right\} \to$

$\to \widehat{AKM} = 90°$ $\to$ $\left.\begin{array}{l} \widehat{MKN} = 90° \\ \text{Analog } \widehat{MJN} = 90° \end{array}\right\} \to MNKJ$ inscriptibil

$\to$ Mai rămâne doar să demonstrez că și I aparține acestui arc.

Cum $b+c=45^\circ \Rightarrow \widehat{KIJ}=\widehat{ACI}+\widehat{IBA}+\widehat{BAC}=135^\circ$.

Dar $\widehat{KMJ}=\widehat{KAM}=45^\circ$

$\Rightarrow KMJI$ inscriptibil.

$\Rightarrow$ Cercul circumscris triunghiului KIJ are pe MN ca diametru. Dar $[MN]\in[BC]$.

$\Rightarrow$ Centrul cercului este pe $[BC]$.

Remarci:

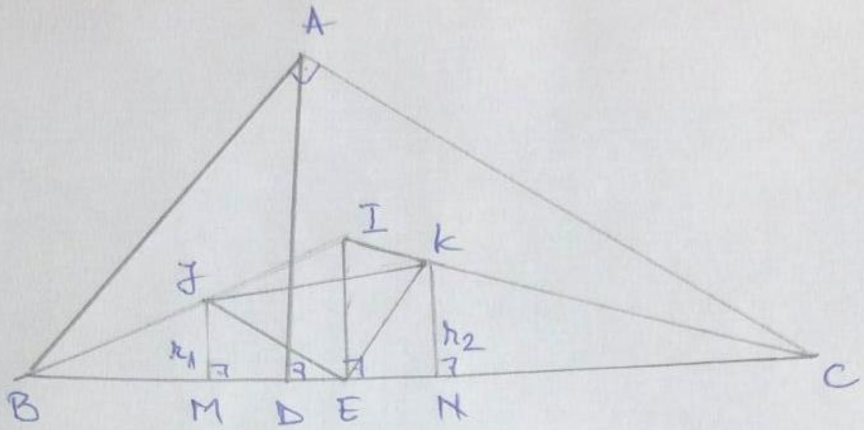
1. Cum $KM \perp AN$ și $(BJ$ bisectoare în $\triangle ABN$ isoscel $\Rightarrow KM \parallel BI$. Analog $NJ \parallel CI$.

2. $$\left.\begin{array}{l}\widehat{JLM}=2\cdot\widehat{JNM}=2\cdot\widehat{ICM}=2c^\circ.\\ \left.\begin{array}{l}\widehat{JKM}=\widehat{JNM}=\widehat{ICB}=c^\circ\\ \widehat{AKM}=\widehat{ADM}=90^\circ \Rightarrow AKDM \text{ inscriptibil}\\ \Rightarrow \widehat{DKM}=\widehat{DAM}=c^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DKJ}=2c^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{DKJ}=\widehat{JLM} \Rightarrow DLJK$ inscriptibil.

q.e.d.

Presupunem $AC \geq BC$ și E, M și N proiectiile pe BC de punctelor I, J și K.



r_1 – raza cercului înscris în ΔABD

r_2 – raza cercului înscris în ΔACD

$r_1 = \dfrac{AD+BD-AB}{2}$, $r_2 = \dfrac{AD+DC-AC}{2}$

$r_2 - r_1 = \dfrac{CD-BD}{2} - \dfrac{AC-AB}{2} = \dfrac{CD-BD}{2} - \dfrac{CN-BM}{2} = DE$

Prin urmare $JM = EN$ și $KN = ME \Rightarrow \Delta JME \equiv \Delta ENK$

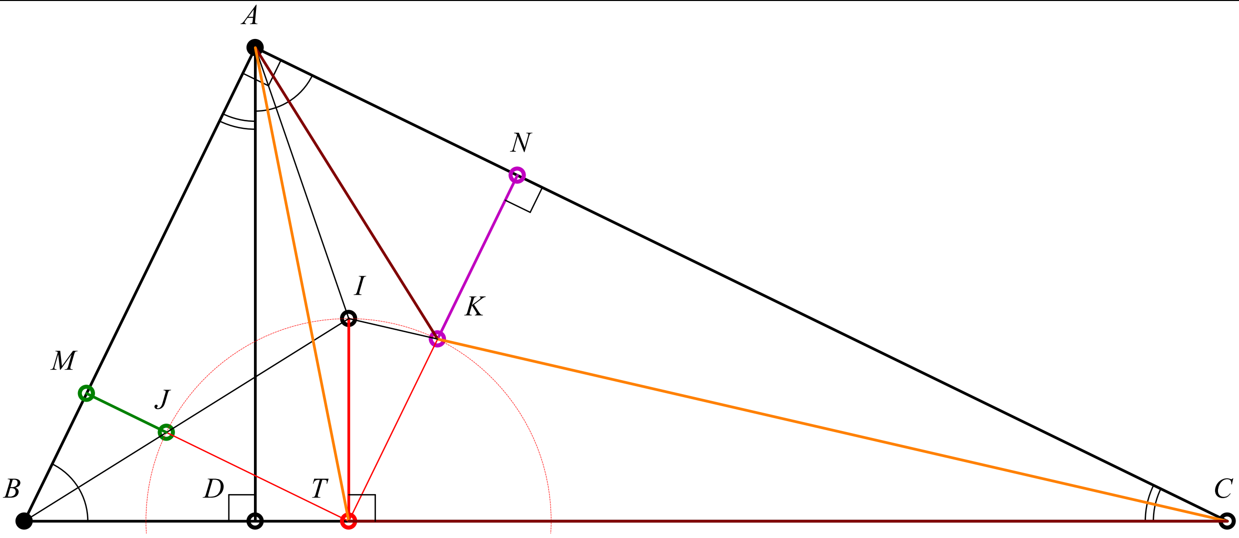
$\Rightarrow JE = EK$ și $m(\widehat{JEK}) = 90^\circ$

Cum $m(\widehat{JIK}) = 90^\circ + \dfrac{m(\widehat{A})}{2} = 135^\circ \Rightarrow I$ se află pe cercul de centru E și raza KE.

<u>OBS</u> E este centrul cercului circumscris ΔIJK.

CRUX, nr.2/2017, problema: OC316:

Într-un triunghi ABC – dreptunghic în A, notăm cu D – piciorul înălţimii duse din vârful A; iar cu I, J şi K – centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD şi respectiv ACD. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului IJK, se găseşte pe ipotenuza $[BC]$.



SOLUŢIE I (*Mihai Miculiţa*):

Notând cu: $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|, h = |AD|, m = |BD|, n = |CD|$ şi T – punctul de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul ABC cu latura $[BC]$, avem:

$$\left.\begin{aligned} |AK|^2 &= \frac{hb(b+h-n)}{b+h+n} \\ |CK|^2 &= \frac{nb(b+n-h)}{b+h+n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AK|^2 - |CK|^2 = \frac{hb(b+h-\cancel{n}) - nb(b+n-\cancel{h})}{b+h+n} =$$

$$= \frac{b\left(bh+h^2-bn-n^2\right)}{b+h+n} = \frac{b\left[b(h-n)+(h-n)(h+n)\right]}{b+h+n} = \frac{b(h-n)\,\cancel{(b+h+n)}}{\cancel{b+h+n}} = b(h-n) =$$

$$= b\left(\frac{bc}{a} - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{b^2(c-b)}{a} \Rightarrow \boxed{|AK|^2 - |CK|^2 = \frac{b^2(c-b)}{a}}. \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem: $AD \perp BC \Leftrightarrow |AT|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |DT|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |AT|^2 = |AB|^2 + |DT|^2 - |BD|^2 = |AB|^2 + \left(|BT| - |BD|\right)^2 - |BD|^2 =$$

$$= |AB|^2 + \left(|BT| - 2.|BD|\right)\cdot|BT| = |AB|^2 + |BT|^2 - 2.|BD|\cdot|BT| =$$

$$= c^2 + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 - \cancel{2}\cdot\frac{c^2}{a}\cdot\frac{a+c-b}{\cancel{2}} = c^2\left(1 - \frac{a+c-b}{a}\right) + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{c^2(b-c)}{a} + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 \Rightarrow |AT|^2 - |TC|^2 = \left[\frac{c^2(b-c)}{a} + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(c-b).\left(a^2-c^2\right)}{a} = \frac{b^2(c-b)}{a} \Rightarrow \boxed{|AT|^2 - |TC|^2 = \frac{b^2(c-b)}{a}}. \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2), rezultă că: $|AK|^2 + |TC|^2 = |TC|^2 + |CK|^2 \Leftrightarrow \boxed{TK \perp AC}$. (3)

Notând acum cu: $\{N\} = (TK \cap [AC]$, avem:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\widehat{ICT} \equiv \widehat{KCN}\left(=\frac{1}{2}.C\right) \\ \left.\begin{array}{r}IT \perp BC \\ KN \perp AC;(3)\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ITC} \equiv \widehat{KNC}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TIK} \equiv \widehat{NKC} \\ [TN] \cap [IC] = \{K\} \Rightarrow \widehat{IKT} \equiv \widehat{NKC}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TIK} \equiv \widehat{IKT} \Rightarrow \boxed{|TK| = |IT|}. \quad (4)$$

În mod analog se arată că: $\boxed{|TJ| = |TI|}$. (5)

În fine, relaţiile (4) şi (5), ne arată că punctul $T \in [BC]$ este centrul cercului circumscris triunghiului IJK. ■

SOLUŢIA a II-a (Titu Zvonaru): Notând cu $N -$ punctul de tangenţă a cercului înscris în ΔADC cu latura $[AC]$ şi cu $\{T\} = NK \cap [BC]$, avem:

$$|CN| = \frac{|AC| + |CD| - |AD|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(b + \frac{b^2}{a} - \frac{bc}{a}\right) = \frac{b(a+b-c)}{2a}$$

şi atunci, din: $\frac{|CN|}{|CT|} = \cos B = \frac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow |CT| = \frac{|BC|.|CN|}{|AC|} = \frac{a}{b} . \frac{b(a+b-c)}{2a} = \frac{a+b-c}{2}$. (1)

Relaţia (1) ne arată că punctul $T -$ este punctul de tangentă al cercului înscris în ΔABC, cu ipotenuza $[BC]$; aşa că: $IT \perp BC$. (2)

Aşa că, avem:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\widehat{ICT} \equiv \widehat{KCN}\left(=\frac{1}{2}.C\right) \\ \left.\begin{array}{r}IT \perp BC;(2) \\ KN \perp AC\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ITC} \equiv \widehat{KNC}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TIK} \equiv \widehat{NKC} \\ [TN] \cap [IC] = \{K\} \Rightarrow \widehat{IKT} \equiv \widehat{NKC}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TIK} \equiv \widehat{IKT} \Rightarrow \boxed{|TK| = |IT|}. \quad (3)$$

În mod analog se arată că: $\boxed{|TJ| = |TI|}$. (4)

În fine, relaţiile (3) şi (4), ne arată că punctul $T \in [BC]$ este centrul cercului circumscris triunghiului IJK. ■