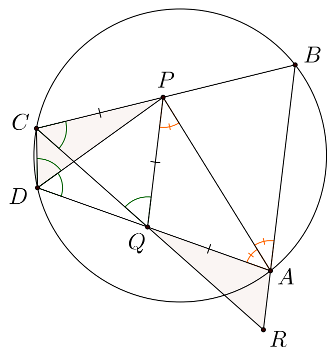
Problema săptămânii 7.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil în care bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$ se intersectează pe latura (BC). Arătaţi că $BC = AB + CD$.

Soluţia 1: (*Andrei Eckstein*)
Fie $(AP$ şi $(DP$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$, cu $P \in (BC)$. Paralela prin P la AB intersectează AD în punctul Q. Atunci $\sphericalangle QPA \equiv \sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PAQ$, deci triunghiul PAQ este isoscel, cu $QA = QP$. Patrulaterul $CDQP$ este inscriptibil (din unghiuri), deci $\sphericalangle PCQ \equiv \sphericalangle PDQ \equiv \sphericalangle PDC \equiv \sphericalangle PQC$, adică şi triunghiul CPQ este isoscel, cu $CP = PQ$. Rezultă că $CP = QA$. Obţinem că triunghiurile DCP şi RAQ sunt congruente (ULU). Într-adevăr $\sphericalangle CPD \equiv \sphericalangle CQD \equiv \sphericalangle AQR$ şi $\sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle QAR$ (suplementare cu $\sphericalangle BAD$). Dar $\sphericalangle BCR \equiv \sphericalangle PDQ \equiv \sphericalangle PDC \equiv \sphericalangle BRC$, deci triunghiul BCR este isoscel. Rezultă că $BC = BR = BA + AR = BA + CD$.

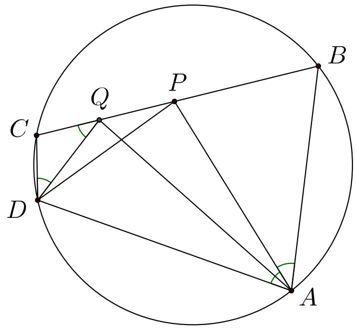


Soluţia 2: (*Cezara Maria Petrui*)
Fie P punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$.
Notăm $m(\sphericalangle ADP) = m(\sphericalangle PDC) = x$, $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle PAD) = y$.
Atunci $m(\sphericalangle ABC) = 180° - 2x$ şi $m(\sphericalangle BCD) = 180° - 2y$.
Fie $Q \in (BC)$ astfel încât $AB = BQ$. Din triunghiul ABQ deducem că $m(\sphericalangle BAQ) = m(\sphericalangle BQA) = x$.

• Dacă $Q \in (BP)$ atunci $AQPD$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle AQB \equiv \sphericalangle ADP$. Rezultă că $\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle DQC$. Atunci, din triunghiul DCQ în care $m(\sphericalangle DQC) = y$ şi $m(\sphericalangle QCD) = 180°$, rezultă $m(\sphericalangle QDC) = y$, deci $CQ = CD$, adică $AB + CD = BQ + CQ = BC$.

• Calculul de mai sus funcţionează şi în cazul $Q = P$.

• Dacă $P \in (BQ)$, în patrulaterul $APQD$ avem $\sphericalangle PQA \equiv \sphericalangle ADP$, deci $APQD$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\sphericalangle DQC) = y$ şi de aici se continuă ca în primul caz.



Seamănă cu soluţia lui *Mihai Miculiţa*. Punctul Q este al doilea punct de intersecţie a cercului circumscris lui PAD cu BC, însă pentru rezolvarea problemei nu avem nevoie să ştim asta apriori.

Soluţia 3: (*Sorin Ţîrc*)
Cazul $AD \parallel BC$ este trivial.
Fie $\{E\} = AD \cap BC$. Să presupunem că $A \in (DE)$, cazul $D \in (AE)$ fiind analog.
Ştim că

$$\frac{PC}{PE} = \frac{DC}{DE} = \frac{AB}{BE} \qquad (1).$$

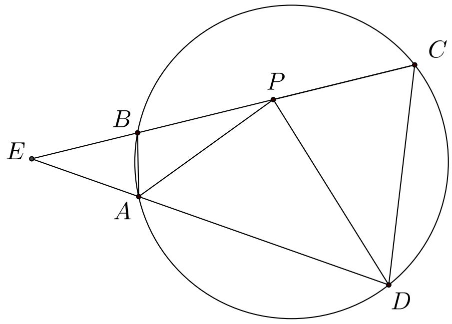
Prima egalitate rezultă din teorema bisectoarei interioare, cea de-a doua din faptul că $ABCD$ este inscriptibil.
Din teorema bisectoarei exterioare rezultă

$$\frac{PB}{PE} = \frac{AB}{AE} \qquad (2).$$

Avem: $\dfrac{BC}{PE} = \dfrac{BP}{PE} + \dfrac{PC}{PE} \overset{(2)+(1)}{=} \dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AB}{BE}$.
Deci $BC = \dfrac{PE}{AE} \cdot AB + \dfrac{PE}{BE} \cdot AB = \dfrac{PE}{AE} \cdot AB + \dfrac{PB+BE}{BE} \cdot AB = \dfrac{PE}{AE} \cdot AB + AB + \dfrac{PB}{BE} \cdot AB$, adică egalitatea $BC = AB + CD$ revine la

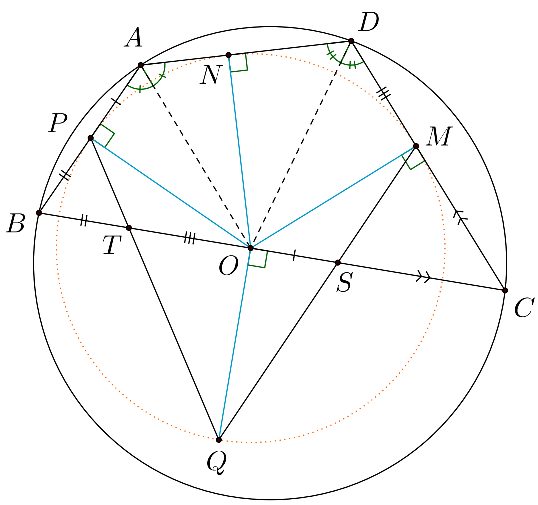
$$AB + CD = AB + \left(\frac{PE}{AE} + \frac{PB}{BE}\right) \cdot AB,$$

deci la $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{PE}{AE} + \dfrac{PB}{BE}$. Dar din inscriptibilitatea lui $ABCD$ rezultă $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{CE}{AE}$, deci relaţia precedentă devine $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{PE}{AE} + \dfrac{PB}{BE}$, adică $\dfrac{PC}{AE} = \dfrac{PB}{BE}$, sau $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{AE}{BE}$, relaţie care rezultă împărţind (1) la (2).



Soluţia 4: (*Radu Popescu*) - schiţă
Fie $O \in BC$ punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$, M, N şi P proiecţiile lui O pe CD, DA şi, respectiv, AB. Evident, $OM = ON = OP$. Construim $OQ \perp BC$, $OQ = OM$, cu Q şi N în semiplane diferite determinate de BC.
Vom trata următoarele cazuri:
- $m(\sphericalangle A) > 90°$, $m(\sphericalangle D) > 90°$
- $m(\sphericalangle A) < 90°$, $m(\sphericalangle D) < 90°$
- $m(\sphericalangle A) < 90°$, $m(\sphericalangle D) > 90°$
- $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle D) = 90°$
- $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle D) < 90°$
- $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle D) > 90°$

Celelalte cazuri sunt analoage.



• Dacă $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$, $m(\sphericalangle D) > 90^\circ$, atunci $M \in (CD)$ şi $P \in (AB)$. Notăm $m(\sphericalangle A) = 2a$, $m(\sphericalangle B) = 2b$, $m(\sphericalangle C) = 2c$, $m(\sphericalangle D) = 2d$ (avem $2a + 2c = 2b + 2d = 180^\circ$). Din construcţie, triunghiurile OMQ şi PMQ sunt isoscele. Avem $m(\sphericalangle MOC) = 90^\circ - 2c$, $m(\sphericalangle MOQ) = 180^\circ - 2c$, deci $m(\sphericalangle OMQ) = m(\sphericalangle OQM) = c$. Fie $\{S\} = MQ \cap BC$, $S \in (OC)$ şi $\{T\} = PQ \cap BC$, $T \in (OB)$. Atunci $m(\sphericalangle CMS) = m(\sphericalangle CSM) = 90^\circ - c = a$, deci $MC = CS$ şi analog $BT = BP$.
În plus, $\Delta\, SOQ \equiv \Delta\, APO$ (CU) (avem $OQ = PO$ şi $m(\sphericalangle OSQ) = m(\sphericalangle PAO) = a$), de unde $SO = AP$. Analog se arată că $MD = OT$, de unde $AB + CD = AP + PB + CM + MD = SO + BT + CS + OT = BC$.

• În cazul $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$, $m(\sphericalangle D) < 90^\circ$ se procedează analog, dar $C \in MD$, $B \in (AP)$, $C \in (OS)$, $B \in (OT)$, astfel că finalul va fi $AB + CD = AP - BP + MD - MC = SO - BT + OT - CS = (SO - SC) + (TO - TB) = CO + OB = BC$.

• În cazul $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$, $m(\sphericalangle D) > 90^\circ$ vom avea $C \in (MD)$, $P \in (AB)$, $C \in (OS)$, $T \in (OB)$, iar congruenţele care se demonstrează ca în primul caz vor da $AB + CD = AP + PB + MD - MC = SO + BT + OT - CS = (SO - SC) + (BT + TO) = CO + OB = BC$.
Celalete cazuri se tratează similar.

Comentarii:

De obicei o într-o problemă în care o ipoteză sau o concluzie afirmă că lungimea unui segment este egală cu suma lungimilor a două alte segmente se demonstrează sintetic fie prin spargere (spargem segmentul lung în două bucăţi congruente cu celelalte două segmente din concluzie), fie prin lipire (lipim cele două segmente mici ca să obţinem un segment congruent cu cel mare). Mai multe asemenea exemple în materialul meu ,,Despre spargeri şi lipiri". (Materialul este destul de incomplet: ideea se pretează nu numai la măsuri de segmente şi de unghiuri, dar şi la măsuri de arii şi de volume.)
Soluţia 1 este una prin ,,lipire", în vreme ce soluţia domnului Mihai Miculiţa (postată într-un alt fişier) şi cea a Cezarei Petrui sunt prin ,,spargere".

Am primit numeroase alte soluţii. Unele prin calcul, altele care surprind proprietăţi interesante ale configuraţiei geometrice din problemă. Unele soluţii necesită tratarea a mai multor cazuri, asemănătoare dar nu chiar analoage. Tratarea lor fiind destul de lungă, nu voi posta acele soluţii (cu excepţia unei schiţe a soluţiei lui Radu Popescu pe care am considerat-o interesantă datorită proprietăţii geometrice surprinse).

O altă idee apare în două rezolvări complet diferite. Una prin calcul trimisă de *Titu Zvonaru*, alta sintetică trimisă de *Alexandru Gîrban*. Ideea este formulată explicit de Titu Zvonaru:

Să presupunem că dreapta AB nu este paralelă cu dreapta CD; fie E punctul lor de intersecţie. Dacă bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$ se intersectează în punctul P situat pe latura (BC), deducem că punctul P este sau centrul cercului înscris, sau centrul cercului E-exînscris în triunghiul EAD. Presupunem că este centrul cercului E-exînscris (calculele sunt similare în cazul cercului înscris). Rezultă că problema este echivalentă cu următoarea:

Fie ABC un triunghi şi I_a centrul cercului A-exînscris. O antiparalelă la latura BC, dusă prin I_a, intersectează prelungirile laturilor AB şi AC în punctele M, respectiv N. Să se arate că $MN = BM + CN$.