Problema săptămânii 65
Fie n un număr natural nenul şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive. Arătaţi că există numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

baraj Franţa, 2014

Problem of the week no. 65
Let n be a positive integer and let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers. Prove that there exist $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ such that

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

TST France, 2014

Soluţie:
Să începem prin a ordona numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$. Vom demonstra prin inducţie tare (de fapt inducţie de pas 2) că o alegere convenabilă a coeficienţilor este $a_k = (-1)^{k+1}$.

• Dacă $n = 1$, avem $a_1x_1^2 = (a_1x_1)^2$, deci inegalitatea este verificată.
• Dacă $n = 2$, avem $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = x_1^2 - x_2^2 \geq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$ deoarece $x_1 \geq x_2 > 0$. Inegalitatea este din nou verificată.
• Fie $n \geq 3$. Presupunând afirmaţia adevărată pentru orice $m < n$ numere, să o demonstrăm pentru n.

Diferenţa dintre membrul stâng şi cel drept, privită ca funcţie de x_1, este

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 = \alpha x_1 + \beta,$$

o funcţie de gradul I, unde $\alpha = -2(a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n) = 2(x_2 - x_3) + 2(x_4 - x_5) + \ldots \geq 0$.
Aşadar, această diferenţă creşte odată cu x_1 (funcţia $x_1 \mapsto \alpha x_1 + \beta$ este crescătoare), deci, cum $x_1 \geq x_2$, avem

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 \geq \alpha x_2 + \beta \ =$$
$$a_1x_2^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 \ =$$
$$a_3x_3^2 + a_4x_2^4 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots + a_nx_n)^2$$

deoarece $a_2 = -a_1$ implică $a_1x_2^2 + a_2x_2^2 = a_1x_2 + a_2x_2 = 0$.
Conform ipotezei de inducţie aplicată numerelor $x_3 \geq x_4 \geq \ldots \geq x_n$ ($n - 2$ numere), diferenţa din ultimul membru este nenegativă, ceea ce încheie inducţia.

Remarcă:
Modul de alegere a semnelor poate fi ghicit rezolvând problema pentru $n = 3$. Este evident că semnele trebuie alese astfel încât două să fie $+1$ şi unul -1. Inegalitatea revine atunci la $a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2$ care, după mici calcule, revine la $(b - a)(b - c) \leq 0$, deci b trebuie să fie variabila mijlocie ca mărime.