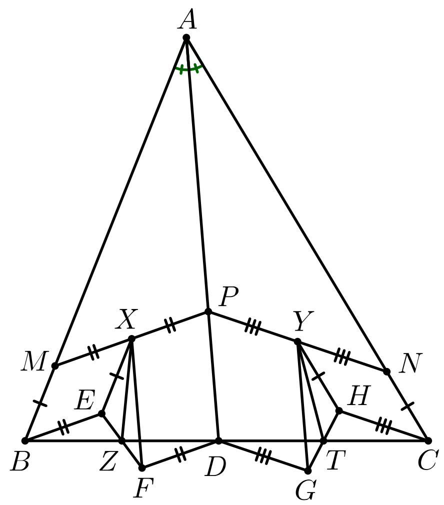
Problema săptămânii 63
În triunghiul ABC, D este piciorul bisectoarei din A. Punctele M, N şi P sunt pe semidreptele $(BA$, $(CA$, respectiv $(DA$ astfel încât $MB = NC$. Dacă X, Y, Z, T sunt mijloacele segmentelor $[MP]$, $[NP]$, $[BD]$, respectiv $[CD]$, arătaţi că $XZ = YT$.

Andrei Eckstein, RMT nr. 3/2017

Problem of the week no. 63
Let ABC be a triangle and let D be the foot of the bisector of angle $\sphericalangle BAC$. Points M, N, P belong to the rays $(BA$, $(CA$ and $(DA$, respectively, such that $MB = NC$. If X, Y, Z and T are the midpoints of the line segments $[MP]$, $[NP]$, $[BD]$, and $[CD]$, respectively, prove that $XZ = YT$.

Andrei Eckstein, RMT nr. 3/2017

Soluţia 1: Construim paralelogramele $XMBE$, $DPXF$, $YPDG$ şi $CNYH$. Atunci $BE = MX = XP = FD$ şi $BE \parallel MP \parallel FD$, deci $BEDF$ este paralelogram (posibil degenerat), iar Z, mijlocul diagonalei $[BD]$, este şi mijlocul diagonalei $[EF]$. Analog se arată că T este mijlocul lui $[GH]$. Triunghiurile XEF şi HYG sunt congruente LUL. Într-adevăr, $XE = MB = CN = YH$, $XF = PD = YG$ şi $\sphericalangle EXF \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle GYH$. Triunghiurile fiind congruente, rezultă că şi medianele $[XZ]$ şi $[YT]$ sunt congruente.



Soluţia 2: (*Radu Lecoiu*)
Fie E şi F mijloacele segmentelor $[DM]$, respectiv $[DN]$.
Atunci $[EZ]$, $[FT]$, $[XE]$, $[YF]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile DMB, DNC, MPD, respectiv NPD, deci avem $EZ = \dfrac{MB}{2} = \dfrac{NC}{2} = FT$ şi $XE = \dfrac{PD}{2} = YF$.

În plus, $EZ \parallel AB$, $FT \parallel AC$, $XE \parallel AD$ şi $YF \parallel AD$ implică $m(\sphericalangle XEZ) = m(\sphericalangle XEM) + m(\sphericalangle MEZ) = m(\sphericalangle ADM) + m(\sphericalangle DMA) = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\,m(\sphericalangle A)$ şi, analog, $m(\sphericalangle YFT) = m(\sphericalangle YFN) + m(\sphericalangle NFT) = m(\sphericalangle ADN) + m(\sphericalangle DNA) = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\,m(\sphericalangle A)$.
Atunci $\Delta XEZ \equiv \Delta YFT$ (LUL), de unde concluzia.