Problema săptămânii 62
Demonstraţi că există 1000 de numere naturale consecutive cu proprietatea că exact 100 dintre numere sunt prime.

Problem of the week no. 62
Prove that there exist 1000 consecutive positive integers such that exactly 100 of them are prime numbers.

Soluţie:
Ne vom folosi de următoarele două fapte:
1. printre primele 1000 de numere naturale sunt mai mult de 100 de numere prime (mai precis 168);
2. există secvenţe formate din 1000 de numere naturale consecutive care nu conţin niciun număr prim, de exemplu: $1001! + 2$, $1001! + 3$, $\ldots$, $1001! + 1001$ (în general, numărul $1001! + k$ fiind divizibil cu k şi mai mare decât k, nu este prim).

Notând cu $f(n)$ numărul numerelor prime aflate în mulţimea $\{n, n+1, \ldots, n+999\}$, funcţia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ are următoarele proprietăţi:
$f(0) > 100$, $f(1001! + 2) = 0$ şi $f(n+1) - f(n) \in \{-1, 0, 1\}$.
Într-adevăr:
$f(n+1) = f(n)$ dacă niciunul dintre numerele n şi $n+1000$ nu este prim sau dacă ambele aceste numere sunt prime,
$f(n+1) = f(n) + 1$ dacă $n + 1000$ este număr prim şi n nu este prim,
$f(n+1) = f(n) - 1$ dacă n este număr prim şi $n + 1000$ nu este prim.

Astfel, şirul $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$ nu „sare” valori întregi şi, cum $f(0) = 168$ şi $f(1000! + 2) = 0$, funcţia va lua toate valorile intermediare, în particular va exista un $n \in \{2, 3, \ldots, 1001! + 1\}$ astfel încât $f(n) = 100$, ceea ce înseamnă că există n astfel încât printre numerele n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+999$ să se afle exact 100 de numere prime.

Remarcă: Mai multe probleme pe această idee găsiţi în materialul O VARIANTĂ DISCRETĂ A TEOREMEI VALORII INTERMEDIARE din secţiunea **Combinatorică - Materiale teoretice** de pe acest site.