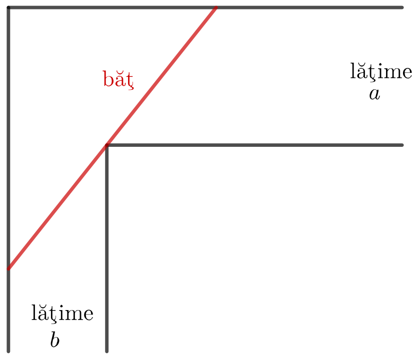
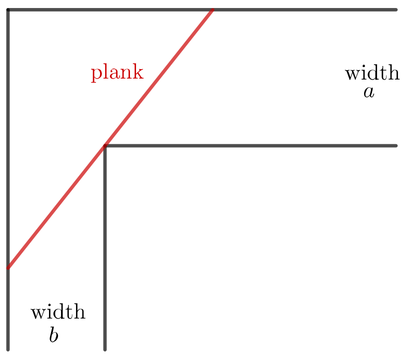
Problema săptămânii 61

Figura de mai jos ilustrează un coridor într-o lume 2-dimensională. Coridoarele au lătimi de a, respectiv b metri şi sunt perpendiculare. Care este lungimea celui mai lung băţ care poate fi mutat în jurul colţului? (Băţul nu are grosime.)



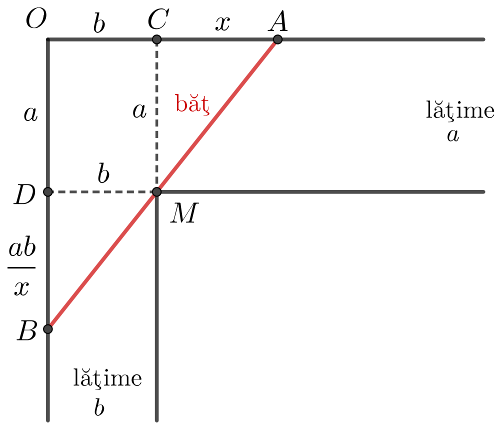
Problem of the week no. 61

The picture below shows a pair of corridors in a two-dimensional world. The corridors have widths a and b meters, and meet at right angles. What is the longest possible plank of wood that can be move around the corner? (The plank has no width.)



Soluţie:

Cu notaţiile din figura de mai jos, dacă un băt „încape", atunci prelungind dreapta suport a bătului până când aceasta intersectează semidreptele $(OC$ şi $(OD$ vom obţine un băţ mai lung care (deocamdată) încape. De asemenea, fixând în $A \in (OC$ un capăt al băţului şi făcând ca băţul să treacă prin M, obţinem un băţ mai lung, care încape şi el. Aşadar, băţul cel mai lung este unul care are un capăt $A \in (OC$, altul în $B \in (OD$ şi conţine punctul M, ca în figură. Dintre toate aceste beţe, îl căutăm pe cel mai scurt: el trebuie să încapă în toate poziţiile lui $A \in (OC$. Notând $CA = x$, avem că $\Delta\, ACM \sim \Delta\, MDB$, deci $BD = \dfrac{ab}{x}$.



Avem $AB^2 = OA^2 + OB^2 = (b+x)^2 + \left(a + \dfrac{ab}{x}\right)^2 = (b+x)^2\left(1 + \dfrac{a^2}{x^2}\right)$, deci avem de minimizat expresia $(b+x)^2\left(1 + \dfrac{a^2}{x^2}\right)$.

Putem face asta folosind inegalitatea lui Hölder:
$(b+x)(b+x)\left(1 + \dfrac{a^2}{x^2}\right) \geq \left(\sqrt[3]{b \cdot b \cdot 1} + \sqrt[3]{x \cdot x \cdot \dfrac{a^2}{x^2}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3$, cu egalitate dacă şi numai dacă $\dfrac{b}{1} = \dfrac{x}{\frac{a^2}{x^2}}$ adică pentru $x = \sqrt[3]{a^2 b}$.

În concluzie, cel mai lung băţ care încape are lungimea $\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$.

În loc de inegalitatea lui Hölder, putem folosi inegalitatea mediilor:
$(b+x)^2\left(1 + \dfrac{a^2}{x^2}\right) = b^2 + 2bx + x^2 + \dfrac{a^2b^2}{x^2} + \dfrac{2a^2b}{x} + a^2 = a^2 + b^2 + \left(bx + bx + \dfrac{a^2b^2}{x^2}\right) + \left(x^2 + \dfrac{a^2b}{x} + \dfrac{a^2b}{x}\right) \geq a^2 + b^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^4} + 3\sqrt[3]{a^4b^2} = \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3$, cu egalitate dacă $bx = \dfrac{a^2b^2}{x^2}$ şi $x^2 = \dfrac{a^2b}{x}$, adică pentru $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

Remarcă: O problemă vag asemănătoare este problema 9 de la AHSME 1988 care cerea dimensiunea minimă a unei camere pătrate în care o masă 8×10 situată într-un colţ al camerei poate fi întoarsă cu $90°$.