Problema săptămânii 60
Un dreptunghi $m \times n$ este împărţit în mn pătrăţele unitate şi trebuie pavat cu mn dale negre şi mn dale albe în formă de triunghi dreptunghic isoscel având catetele de lungime 1. Fiecare pătrăţel unitate trebuie să fie acoperit de două dale. O pavare se numeşte *bună* dacă orice două triunghiuri care au o latură comună sunt de culori diferite.
Câte pavări bune există?

Problem of the week no. 60
An $m \times n$ rectangle is divided into mn unit squares, and must be covered by mn black and mn white isosceles right-angled triangles whose side lengths are 1, 1 and $\sqrt{2}$. Each unit square must be covered by two triangles. A covering is said to be *good* if any two triangles sharing a common side are of distinct colors.
How many different good coverings are there?

Soluţie:
Începem prin a pava pătratul din colţul din stânga-sus. Îl putem pava în 4 moduri: putem trage diagonala care îl împarte în două triunghiuri în două moduri, apoi avem două moduri de a stabli care triunghi este acoperit cu o dală neagră şi care cu o dală albă.
Condinuăm pavarea pătrăţelelor aflate în primul rând, cel de sus. Le pavăm de la stânga la dreapta. Atunci când le vine rândul să fie pavate, aceste pătrăţele au o latură comună cu un triunghi a cărui culoare a fost deja stabilită (latura din stânga). În acest pătrăţel putem trage diagonala în două moduri, dar apoi triunghiul care conţine latura din stânga a pătratului are culoarea impusă (diferită de cea a triunghiului din pătratul pavat anterior cu care are latură comună). Atunci şi culoarea celuilalt triunghi poate fi aleasă într-un singur fel, deci acest pătrăţel poate fi pavat în două moduri.
Procedăm acum simlar cu pătrăţelele situate pe prima coloană (cea din stânga). Le pavăm de sus în jos. Fiecare din aceste pătrăţele poate fi pavat în două moduri.
În fine, pavăm pătrăţelele rămase, de la stânga la dreapta, de sus în jos. Fiecare pătrăţel, atunci când îi vine rândul să fie pavat, are deja doi vecini pavaţi: cel de deasupra şi cel din stânga. Ne uităm la triunghiurile deja pavate care au latură comună cu pătrăţelul curent. Distingem două cazuri:
• Dacă ele au aceeaşi culoare, atunci în pătrăţelul nostru dala care conţine latura de sus şi dala care conţine latura din stânga trebuie să aibă aceeaşi culoare, deci cele două laturi trebuie să facă parte din aceeaşi dală, de culoare opusă cu cea a triunghiurilor amintite. Aşadar trebuie să tragem diagonala care uneşte vârful din stânga-jos cu cel din dreapta-sus şi avem o singură modalitate de a colora dalele.
• Dacă cele două triunghiuri au culori diferite, atunci în pătrăţelul nostru dala care conţine latura de sus şi dala care conţine latura din stânga trebuie să aibă culori diferite, deci cele două laturi trebuie să facă parte din dale diferite, de culori opuse cu cele ale triunghiurilor amintite. Trebuie aşadar să tragem diagonala care

unește vârful din stânga-sus cu cel din dreapta-jos și avem o singură modalitate de a colora dalele.
În concluzie, avem $4 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{m-1} \cdot 1^{(m-1)(n-1)} = 2^{m+n}$ moduri de a pava dreptunghiul.

O problemă asemănătoare s-a dat la barajul 2 din 2016:

Problema 2. Fiind date trei culori și un dreptunghi $m \times n$ împărțit în pătrate unitate, dorim să colorăm fiecare segment care constituie o latură a unui pătrat unitate cu una din cele trei culori astfel încât fiecare pătrat unitate să aibă două laturi de o culoare și două laturi de o altă culoare. Câte asemenea colorări există? (Olimpiadă Columbia 1997)
Soluție:
Numerotăm linile de sus în jos, de la stânga la dreapta. Latura din stânga a pătratului unitate aflat în colțul din stânga-sus poate fi colorată în 3 moduri. Sunt trei moduri de a alege cealaltă latură a acestui pătrățel care va fi colorată cu aceeași culoare. Pentru laturile rămase avem două opțiuni (aceeași culoare pentru amândouă, una din cele două culori rămase). În total, sunt 18 colorări posibile.
Colorăm în continuare, succesiv, pătratele de pe prima linie, de la stânga la dreapta. De fiecare dată, latura din stânga este deja colorată, așa încât pentru colorarea fiecărui asemenea pătrat avem câte 6 variante. La fel se întâmplă când colorăm, succesiv, pătratele de pe prima coloană, de sus în jos, începând de pe linia 2: avem câte 6 variante.
Trecem acum la colorarea fiecăruia din pătratele aflate pe liniile $2, 3, \ldots, m$ și coloanele $2, 3, \ldots, n$. Facem colorarea de sus în jos, de la stânga la dreapta. Fiecare pătrat are deja latura din stânga și cea de sus colorate. Dacă au culori diferite, laturile rămase trebuie să aibă exact aceste două culori, astfel că cele două laturi rămase pot fi colorate în două moduri. Dacă latura din stânga și cea de sus au aceeași culoare, cele două laturi rămase trebuie colorate cu o aceeași culoare, culoare care poate fi aleasă în două moduri. Așadar și în acest caz sunt două variante de colorare.
În concluzie, sunt $18 \cdot 6^{m-1} \cdot 6^{n-1} \cdot 2^{(m-1)(n-1)} = 3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ colorări posibile.

Remarcă: Asemănătoare sunt:
• modul de a parcurge dreptunghiul,
• faptul că pentru ultima categorie de pătrățele se pot întâmpla două situații, însă numărul de completări este același în ambele situații
• modul în care s-a aplicat principiul (regula) produsului.