Problema săptămânii 6.

Doi jucători joacă următorul joc: primul jucător scrie pe tablă o cifră, apoi, al doilea jucător scrie o cifră, la dreapta sau la stânga cifrei scrise de primul. Apoi primul jucător scrie o cifră, la stânga sau la dreapta numărului scris pe tablă. Apoi al doilea jucător scrie o cifră, la dreapta sau la stânga numărului de pe tablă, ş.a.m.d. Arătaţi că primul jucător poate juca în aşa fel încât numărul scris pe tablă după mutarea celui de-al doilea jucător să nu fie niciodată pătrat perfect.

din cartea *Kombinatorika*, de Pavle Mladenović (limba sârbă)

Soluţia 1: (din cartea de mai sus)
Rezolvarea se bazează pe următoarele trei observaţii:
1. Cifrele 7 şi 8 nu pot fi ultima cifră a unui pătrat perfect.
2. Un număr de două cifre care începe cu cifra 7 nu este pătrat perfect.
3. Diferenţa dintre pătratele a două numere naturale consecutive este mai mare ca 20 dacă numerele au cel puţin două cifre.
O strategie bună pentru primul jucător este următoarea:
• La prima mutare el scrie pe tablă cifra 7. Conform observaţiilor 1. şi 2., al doilea jucător nu poate forma un pătrat perfect de două cifre, nici scriind o cifră la dreapta lui 7, nici scriind o cifră la stânga lui 7.
• La mutările următoare, el va scrie la dreapta numărului de pe tablă una din cifrele 7 sau 8. Dacă numărul scris pe tablă înainte de a face primul jucător mutarea este $\overline{a_1a_2\dots a_n}$, conform observaţiei 3., dintre următoarele 20 de numere, $\overline{a_1a_2\dots a_n70}$, $\overline{a_1a_2\dots a_n71}$, ... , $\overline{a_1a_2\dots a_n89}$, cel mult unul este pătrat perfect. Dacă nu există niciun pătrat perfect printre primele 10 numere, atunci primul jucător lasă pe tablă numărul $\overline{a_1a_2\dots a_n7}$, iar în caz contrar el lasă numărul $\overline{a_1a_2\dots a_n8}$, privându-şi astfel adversarul de posibilitatea de a lăsa pe tablă un pătrat perfect.

Soluţia 2: (*Andrei Bornea*)
Iată strategia primului jucător: la început el scrie pe tablă cifra 7. La mutarea următoare, adversarul său nu poate lăsa pe tablă un pătrat perfect.
Să vedem ce mutare trebuie să facă primul jucător în continuare.
Ştim că pătratele perfecte sunt de forma $9k$, $9k+1$, $9k+4$ sau $9k+7$.
Fie x numărul scris până acum pe tablă şi $S(x)$ suma cifrelor sale.
Cazul 1: $S(x) = 9k+1$. Suma cifrelor ce urmează să fie adăugate de cei doi pentru ca după următoarea pereche de mutări să se poată eventual forma un pătrat perfect, trebuie sa fie 0, 3, 6 sau 8 (mod 9).
Astfel observăm că dacă primul ar adăuga la finalul lui x pe 7, al doilea poate adăuga 1, 2, 5 sau 8. Observăm că 7 nu poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect, deci al doilea jucător trebuie să adauge cifra sa la finalul numărului obţinut prin adăugarea lui 7. Aşadar ultimele două cifre pot fi 71, 72, 75 sau 78 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect. (Un pătrat perfect divizibil cu 5 are ultimele două cifre 25).

În concluzia cazului 1, observăm că dacă $S(x) = 9k+1$ atunci primul poate ,,muta" astfel încât al doilea să nu poată forma pătrat perfect.
Cazul 2: $S(x) = 9k + 2$. Suma cifrelor ce urmează să fie adăugate de cei doi trebuie să fie 2, 5, 7 sau 8 (mod 9) pentru ca numărul obţinut să poată să fie pătrat perfect.
Dacă primul ar adăuga la finalul lui x pe 7, al doilea poate adăuga (neapărat la sfârşit) 1, 0, 9, 7 sau 4.
Ultimele două cifre vor putea fi 70, 71, 79, 77 sau 74 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.
Cazul 3: $S(x) = 9k + 3$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată fi pătrat perfect este 1, 4, 6 sau 7 (mod 9).
Dacă primul ar adăuga la finalul lui x pe 8, al doilea poate adăuga 2, 5, 7 sau 8.
Observăm că 8 nu poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect, deci al doilea trebuie să adauge cifra sa la finalul numărului obţinut prin adăugarea lui 8. Ultimele două cifre vor putea fi 82, 85, 87 sau 88 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.
Cazul 4: $S(x) = 9k + 4$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată fi pătrat perfect este 0, 3, 5 sau 6 (mod 9).
Dacă primul ar adăuga la finalul lui x pe 7, al doilea trebuie să adauge, neapărat la sfârşit, una din cifrele 2, 5, 7 sau 8. Ultimele două cifre pot fi atunci 72, 75, 77 sau 78 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.
Cazul 5: $S(x) = 9k + 5$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată fi pătrat perfect este 2, 4, 5 sau 8 (mod 9).
Dacă primul adaugă la finalul lui x pe 3, al doilea poate adăuga, obligatoriu la sfârşit, una din cifrele 1, 2, 5 sau 8. Ultimele două cifre vor fi 31, 32, 35 sau 38 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.
Cazul 6: $S(x) = 9k + 6$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată eventual fi pătrat perfect este 1, 3, 4 sau 7 (mod 9). Primul jucător adaugă la finalul lui x pe 3. Atunci al doilea poate adăuga (la sfârşit) 7, 0, 9, 1 sau 4.
Ultimele două cifre pot fi 37, 31, 30, 39 sau 34 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect (deoarece $\overline{x39}$ dă rest 3 la împărţirea cu 4, deci nu poate fi pătrat perfect).
Cazul 7: $S(x) = 9k + 7$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată fi pătrat perfect este 2, 3, 6 sau 0 (mod 9).
Primul jucător adaugă la finalul lui x pe 7. Al doilea poate adăuga (la finalul numărului) 4, 5, 8 sau 2. Dar ultimele două cifre vor fi atunci 74, 75, 78 sau 72 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.
Cazul 8: $S(x) = 9k + 8$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată fi pătrat perfect este 1, 2, 5 sau 8 (mod 9).
Dacă primul adaugă la finalul lui x pe 3, al doilea poate adăuga, obligatoriu la sfârşit, 7, 8, 2 sau 5. Ultimele două cifre vor putea fi 37, 38, 32 sau 35 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.

Cazul 9: $S(x) = 9k$. Suma cifrelor ce ar trebui să fie adăugate de cei doi pentru ca numărul obţinut să poată deveni pătrat perfect este 0, 1, 4 sau 7 (mod 9).
Ultimele trei cifre ale unui pătrat perfect divizibil cu 5 sunt 625.
Dacă ultima cifră a lui x nu este 6, primul jucător îl va adăuga la finalul lui x pe 2. Al doilea jucător poate adăuga (la sfârşit) 7, 8, 2 sau 5. Ultimele două cifre pot fi 22, 27, 28 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect, dar şi 25. În ultimul caz, cum ultimele trei cifre nu sunt 625, numărul obţinut nu poate fi pătrat perfect.
Dacă ultima cifră a lui x este 6 atunci primul adaugă la final 5. Al doilea jucător ar putea adăuga 4, 5, 8 sau 2. Cum 65 nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect, al doilea jucător trebuie să adauge cifra sa la finalul numărului obţinut prin adăugarea lui 5. Ultimele două cifre vor fi 54, 58, 55 sau 52 care nu pot fi ultimele două cifre ale unui pătrat perfect.
În concluzie, oricare ar fi x numărul natural scris pe tablă, primul jucător poate ,,muta" astfel încât al doilea jucător să nu poată forma pătrat perfect.