Pe laturile unui patrulater inscriptibil $ABCD$, comstruim în exteriorul patrulaterului, dreptungiurile: $ABML \equiv CQRD$ şi $ADST \equiv BNPC$. Notăm cu O_1, O_2, O_3 şi O_4 – centrele celor patru dreptunghiuri. Arătaţi că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ – este un dreptunghi.

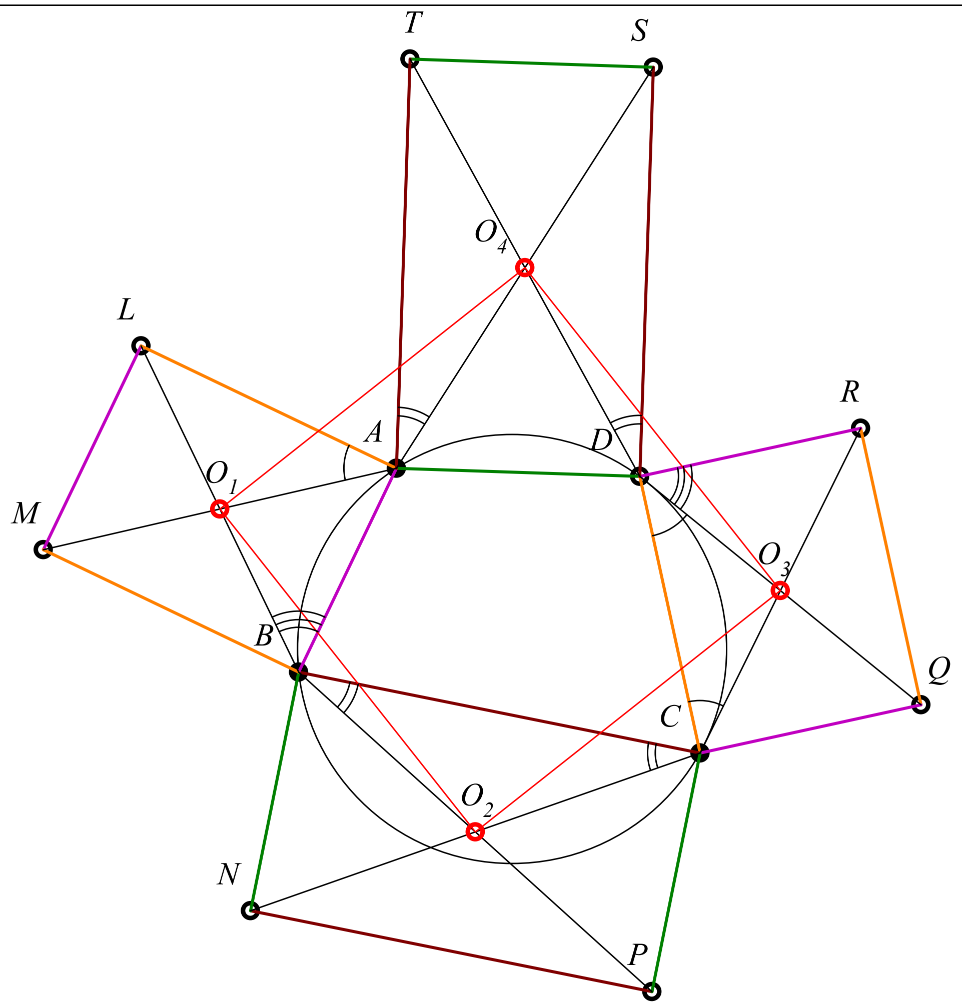

Fig.1.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):

1). Din faptul că (v.Fig.1):

$$ABML \equiv CQRD(dreptunghiuri) \Rightarrow \begin{cases} [AO_1] \equiv [BO_1] \equiv [CO_3] \equiv [DO_3]; & (1) \\ \widehat{O_1AL} \equiv \widehat{O_3CD} \equiv \widehat{O_3DC}; & (2) \\ \widehat{O_1BA} \equiv \widehat{RDO_3}; & (3) \end{cases}$$

şi din:

$$ADST \equiv BNPC(dreptunghiuri) \Rightarrow \begin{cases} [AO_4] \equiv [DO_4] \equiv [BO_2] \equiv [CO_2]; & (4) \\ \widehat{TAO_4} \equiv \widehat{O_4DS} \equiv \widehat{O_2BC} \equiv \widehat{O_2CB}. & (5) \end{cases}$$

Pe de altă parte, ţinând seama de faptul că:

$$ABCD - inscriptibil \Rightarrow m\left(\widehat{BAD}\right) = 180^0 - m\left(\widehat{BCD}\right) \Rightarrow m\left(\widehat{LAT}\right) =$$

$$= 360^0 - \left[m\left(\widehat{LAB}\right) + m\left(\widehat{BAD}\right) + m\left(\widehat{DAT}\right)\right] = 360^0 - \left\{90^0 + \left[180^0 - m\left(\widehat{BCD}\right)\right] + 90^0\right\} =$$

$$= m\left(\widehat{BCD}\right) \Rightarrow \widehat{LAT} \equiv \widehat{BCD}; \quad (6)$$

şi atunci, din:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{O_1AL} &\equiv \widehat{DCO_3};\ (1) \\ \widehat{LAT} &\equiv \widehat{BCD};\ (6) \\ \widehat{TAO_4} &\equiv \widehat{BCO_2};\ (5) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\left(\underline{\widehat{O_1AO_4}}\right) = m\left(\widehat{O_1AL}\right) + m\left(\widehat{LAT}\right) + m\left(\widehat{TAO_4}\right) =$$

$$\left.\begin{aligned} = m\left(\widehat{DCO_3}\right) + m\left(\widehat{BCD}\right) + m\left(\widehat{BCO_2}\right) = m\left(\underline{\widehat{O_3CO_2}}\right) \Rightarrow \widehat{O_1AO_4} \equiv \widehat{O_3CO_2} \\ [AO_1] \equiv [CO_3];\ (1) \\ [AO_4] \equiv [CO_2];\ (4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta O_1AO_4 \equiv \Delta O_3CO_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[O_1O_4] \equiv [O_3O_2]}. \quad (7)$$

În mod analog arătăm că: $\Delta O_1BO_2 \equiv \Delta O_3DO_4 \Rightarrow \boxed{[O_1O_2] \equiv [O_3O_4]}.$ (8)

Din relaţiile (7) şi (8), rezultă până acum, că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ – **este un paralelogram**.

Aşa că ne mai rămâne de arătat el are diagonalele congruente, sau că el are un unghi drept.

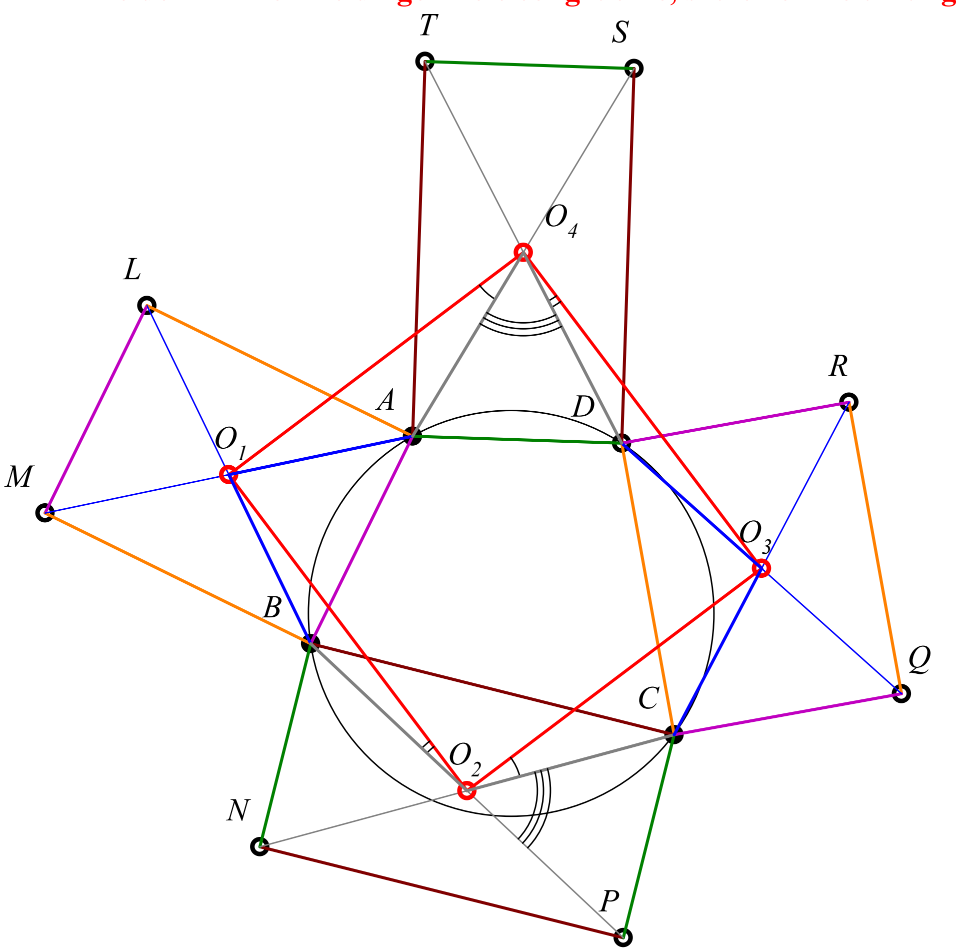

Fig.2.

2). Din faptul că (v.Fig.2):

$$\left.\begin{aligned} \Delta AO_1O_4 \equiv \Delta CO_3O_2 &\Rightarrow \widehat{AO_4O_1} \equiv \widehat{CO_2O_3} \\ \Delta DO_4O_3 \equiv \Delta BO_2O_1 &\Rightarrow \widehat{DO_4O_3} \equiv \widehat{BO_2O_1} \\ \Delta O_4AD \equiv \Delta CO_2P &\Rightarrow \widehat{AO_4D} \equiv \widehat{CO_2P} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{O_1O_4O_3}\right) + m\left(\widehat{O_1O_2O_3}\right) =$$

$$= \left[\cancel{m\left(\widehat{AO_4O_1}\right)} + m\left(\widehat{AO_4D}\right) + \cancel{m\left(\widehat{DO_4O_3}\right)}\right] + m\left(\widehat{BO_2C}\right) - \left[\cancel{m\left(\widehat{BO_2O_1}\right)} + \cancel{m\left(\widehat{CO_2O_3}\right)}\right] =$$

$= m\left(\widehat{AO_4D}\right) + m\left(\widehat{BO_2C}\right) = m\left(\widehat{CO_2P}\right) + m\left(\widehat{BO_2C}\right) = 180^0 \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{O_1O_4O_3}\right) + m\left(\widehat{O_1O_2O_3}\right) = 180^0}$. (9) P

e de altă parte, întrucât:

$$O_1O_2O_3O_4 - O_1O_2O_3O_4 - paralelogram \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{O_1O_4O_3}\right) = m\left(\widehat{O_1O_2O_3}\right)}. \quad (10)$$

În fine, din relaţiile (9) şi (10), urmează că: $m\left(\widehat{O_1O_4O_3}\right) = m\left(\widehat{O_1O_2O_3}\right) = 90^0$. ■

OBSERVAŢIE: Această problemă este înrudită cu următoarea problemă a lui H. VAN AUBEL (problema 879 din MATHESIS, 1893, p.216): **Centrele pătratelor construite în spre exterior pe laturile unui patrulater convex, sunt vârfurile unui pseudopătrat** [1]).

[1] Printr-un **pseudopătrat**, înţelegem un patrulater care are diagonalele perpendiculare şi congruente. Noţiunea de pseudopătrat a fost introdusă de către JOSEPH NEUBERG într-un articol apărut în 1894, p.268-271 din revista belgiană MATHESIS, intitulat: "*Sur quelques quadrilatèeres spéciaux*".