Problema săptămânii 58
Determinaţi toate perechile (a, b) de numere naturale nenule care au proprietatea că $7^a - 3^b$ divide $a^4 + b^2$.

Stephan Wagner, Austria, lista scurtă OIM 2008

Problem of the week no. 58
Find all pairs of positive integers (a, b) such that $7^a - 3^b$ divides $a^4 + b^2$.

Stephan Wagner, Austria, IMO Shortlist 2008

Soluţie: (AoPS user m.essien)
Membrul stâng este par, deci $a^4 + b^2$ este par, adică a, b au aceeaşi paritate.
Dacă a, b sunt impare, atunci 4 divide $7^a - 3^b$, dar 4 nu divide $a^4 + b^2$.
Aşadar a, b sunt pare şi scriem $a = 2a_1,\ b = 2b_1$.
Obţinem că $(7^{a_1} - 3^{b_1})(7^{a_1} + 3^{b_1})$ divide $4(4a_1^4 + b_1^2)$
Dacă b_1 este impar, atunci 8 divide $(7^{a_1} - 3^{b_1})(7^{a_1} + 3^{b_1})$ dar nu şi $4(4a_1^4 + b_1^2)$, deci b_1 trebue să fie par.
Scriem atunci $b_1 = 2c_1$.
Obţinem că $(7^{a_1} - 3^{2c_1})(7^{a_1} + 3^{2c_1})$ divide $16(a_1^4 + c_1^2)$
Atunci $|(7^{a_1} - 3^{2c_1})(7^{a_1} + 3^{2c_1})| \leq |16(a_1^4 + c_1^2)|$
Dar $|7^{a_1} - 3^{2c_1}| \geq 2$ (pentru că ambii termeni sunt impari), deci $2(7^{a_1} + 3^{2c_1}) \leq 16(a_1^4 + c_1^2)$.
Dar pentru $a_1 = 1, 2, 3$ obţinem imediat $c_1 = 1, 2$, iar pentru $a_1 \geq 4$ avem că $2(7^{a_1}) > 16a_1^4$. De asemenea, $2(3^{2c_1}) > 16c_1^2$ pentru orice $c_1 \in \mathbb{N}$.
Prin urmare, este suficient să verificăm perechile $(a_1, c_1) \in \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$. Convine numai $(a_1, c_1) = (1, 1)$, adică $(a, b) = (2, 4)$, care este unica soluţie a problemei.

Solution: (English), (AoPS user m.essien)
The left hand side is even, so $a^4 + b^2$ is even, and a, b have the same parity. However, if a, b are odd, we have that 4 divides $7^a - 3^b$, but 4 doesn't divide $a^4 + b^2$.
So a, b are even, and let's say $a = 2a_1,\ b = 2b_1$.
We get that $(7^{a_1} - 3^{b_1})(7^{a_1} + 3^{b_1})$ divides $4(4a_1^4 + b_1^2)$
If b_1 is odd, then 8 divides $(7^{a_1} - 3^{b_1})(7^{a_1} + 3^{b_1})$ but not $4(4a_1^4 + b_1^2)$, so b_1 is even.
Say $b_1 = 2c_1$.
We obtain that $(7^{a_1} - 3^{2c_1})(7^{a_1} + 3^{2c_1})$ divides $16(a_1^4 + c_1^2)$
So $|(7^{a_1} - 3^{2c_1})(7^{a_1} + 3^{2c_1})| \leq |16(a_1^4 + c_1^2)|$
But $|7^{a_1} - 3^{2c_1}| \geq 2$ (because both terms are even), and so $2(7^{a_1} + 3^{2c_1}) \leq 16(a_1^4 + c_1^2)$.
But for $a_1 = 1, 2, 3$ we easily get $c_1 = 1, 2$, and for $a_1 \geq 4$, we have that $2(7^{a_1}) > 16a_1^4$. Also, $2(3^{2c_1}) > 16c_1^2$ for all $c_1 \in \mathbb{N}$.
So it is enough to check $(a_1, c_1) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)$. It follows that $(a_1, c_1) = (1, 1)$, or $(a, b) = (2, 4)$ as the only solution.