Problema săptămânii 57
Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ ($n \geq 3$) cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3$. Aflaţi valoarea maximă a expresiei $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \ldots + a_1a_2 \ldots a_n$.
(generalizare a unei probleme date la faza finală a concursului viitoriolimpici, Câmpulung, 2017)

Alexandru Mihalcu

Problem of the week no. 57
Let $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ ($n \geq 3$) such that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3$. Find the maximum value of $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \ldots + a_1a_2 \ldots a_n$.

Alexandru Mihalcu

Soluţie:
Fie $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \ldots + a_1a_2 \ldots a_n$. Arătăm că $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq E_n(a_1 + a_n, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0) = E_{n-1}(a_1 + a_n, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $\forall\, n \geq 4$ şi că $E_3(a_1, a_2, a_3) \leq E_3(2, 1, 0) = 4$.
Va rezulta prin inducţie că $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4$, cu egalitate pentru $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ şi $a_k = 0$, $\forall\, k \geq 3$, deci maximul căutat este 4.

Prima inegalitate este echivalentă cu

$$a_1a_2 \ldots a_n \leq a_n + a_na_2 + a_na_2a_3 + \ldots + a_na_2 \ldots a_{n-1}.$$

Dacă $a_n = 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă nu, se împarte cu a_n, apoi se observă că membrul stâng este mai mic sau egal cu 1 (din inegalitatea mediilor), iar cel drept mai mare sau egal cu 1.
Egalitate avem dacă $a_n = 0$. (În cazul $n = 4$ mai putem avea egalitate dacă $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, dar şi asta implică $a_4 = 0$.)

În fine, $E_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_1a_2(1 + a_3) \leq a_1 + a_1 \cdot \left(\dfrac{a_2 + 1 + a_3}{2}\right)^2 = a_1 + a_1 \cdot \dfrac{(4 - a_1)^2}{4} = \dfrac{a_1^3 - 8a_1^2 + 20a_1}{4} \overset{(*)}{\leq} 4$, inegalitatea $(*)$ fiind echivalentă cu $a_1^3 - 8a_1^2 + 20a_1 - 16 \leq 0$ şi cu $(a_1 - 2)^2(a_1 - 4) \leq 0$, ceea ce este evident.
Egalitatea are loc dacă $a_1 = 2$ şi $a_2 = a_3 + 1$, deci pentru $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$.

Solution: (English)
We prove that the maximum value is 4.
Denote $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \ldots + a_1a_2 \ldots a_n$. First, we prove that $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq E_n(a_1 + a_n, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0) = E_{n-1}(a_1 + a_n, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $\forall\, n \geq 4$. Next, we show that $E_3(a_1, a_2, a_3) \leq E_3(2, 1, 0) = 4$. It will inductively follow that $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4$, with equality when $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ and $a_k = 0$, $\forall\, k \geq 3$, hence the desired maximum value is 4.

The first inequality is equivalent with

$$a_1a_2 \ldots a_n \leq a_n + a_na_2 + a_na_2a_3 + \ldots + a_na_2 \ldots a_{n-1}.$$

If $a_n = 0$, we have equality. If $a_n \neq 0$, we divide by a_n and notice that the LHS is at most 1 (from the AM-GM inequality), while the RHS is at least 1.
Equality holds only when $a_n = 0$. (In case $n = 4$ we could have equality also when $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, but this case also makes $a_4 = 0$.)

Finally, $E_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_1a_2(1 + a_3) \leq a_1 + a_1 \cdot \left(\dfrac{a_2 + 1 + a_3}{2}\right)^2 = a_1 + a_1 \cdot \dfrac{(4 - a_1)^2}{4} = \dfrac{a_1^3 - 8a_1^2 + 20a_1}{4} \overset{(*)}{\leq} 4$, the inequality $(*)$ being equivalent with $(a_1 - 2)^2(a_1 - 4) \leq 0$, which is clear.
Equality holds if and only if $a_1 = 2$ and $a_2 = a_3 + 1$, i.e. for $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$.