

### Problema săptămânii 56

Patru grămezi conțin 38, 45, 61 și respectiv 70 de bețe de chibrit. Doi jucători joacă următorul joc. Mutând alternativ, cei doi aleg două dintre grămezi și aleg un număr nenul de bețe din prima grămadă aleasă și un număr nenul de bețe din cea de-a doua grămadă aleasă. Jucătorul care nu mai poate muta pierde. Care din cei doi jucători are strategie câștigătoare?

*Baltic Way, 1996, pb. 19*

### Problem of the week no. 56

Four heaps contain 38, 45, 61 and 70 matches respectively. Two players take turns choosing any two of the heaps and taking some non-zero number of matches from one heap and some non-zero number of matches from the other heap. The player who cannot make a move, loses. Which one of the players has a winning strategy?

*Baltic Way, 1996, pb. 19*

#### *Soluție:*

Cu o analiză retrogradă putem intui mulțimea pozițiilor pierzătoare:

- dacă urmez la mutare și (cel puțin) trei grămezi sunt goale, nu pot muta, deci am pierdut;
- dacă urmez la mutare și exact o grămadă este goală, golesc alte două grămezi și câștig.

Așadar, putem reformula: cine golește primul o grămadă, pierde. Să continuăm analiza (în continuare presupunem că nu avem grămezi goale):

- dacă (cel puțin) trei dintre grămezi conțin câte un singur băț, voi fi nevoit să golesc (cel puțin) o grămadă și, așa cum am văzut, voi pierde;
- dacă există una sau două grămezi cu un singur băț, câștig formând trei grămezi cu câte un singur băț.

Putem reformula miza jocului: cine lasă primul o grămadă cu un singur băț, pierde. Putem, eventual, continua:

- dacă (cel puțin) trei dintre grămezi conțin câte două bețe, voi fi nevoit să las în (cel puțin) o grămadă 0-1 bețe și, așa cum am văzut, voi pierde;
- dacă există una sau două grămezi cu două bețe, câștig formând trei grămezi cu câte două bețe.

Intuim că mulțimea pozițiilor pierzătoare este cea în care grămezile conțin  $x$ ,  $x$ ,  $x$  și  $y$  bețe, cu  $x \leq y$  (adică cele mai sărace trei grămezi conțin același număr de bețe). Într-adevăr:

- pozițiile finale (cele din care nu mai există mutare) sunt de această formă (minim trei grămezi goale);
- dintr-o poziție pierzătoare nu se poate muta într-o altă poziție pierzătoare (ar însemna să luăm bețe din 1 sau 3 grămezi);
- din orice poziție care nu este pierzătoare există o mutare către una pierzătoare: dacă grămezile conțin  $a \leq b \leq c \leq d$  bețe, atunci știm că  $a < c$ , deci putem scoate

$c - a > 0$  bețe din grămada cu  $c$  bețe și  $d - a > 0$  bețe din grămada cu  $d$ , lăsând poziția (pierzătoare) cu grămezile având  $a, b, a$ , respectiv  $a$  bețe.

Strategia câștigătoare se vede acum ușor: îi lăsăm mereu adversarului o configurație de tipul  $(a, a, a, b)$ , cu  $a \leq b$ .

De pildă, prima mutare ar putea fi să luăm 7 bețe din ce;e 45 și 23 din grămada de 61, lăsând astfel grămezi cu 38, 38, 38 și 70 de bețe. Există și alte două posibilități.

*English solution:* The first player wins by making moves so that the opponent must face positions of the form  $(a, a, a, b)$ , where  $a \leq b$ . (His first move is to take 7 matches from the heap containing 45 and 23 from the heap containing 61, thus leaving heaps with 38, 38, 38 and 70 matches. It is not the only convenient move.)