Problema săptămânii 54
Stabiliţi dacă există numere naturale n astfel încât $3n^2 + 3n + 7$ să fie cub pefect.

PAMO, 2004

Problem of the week no. 54
Do there exist two positive integers, m and n, such that $3n^2 + 3n + 7 = m^3$?

PAMO, 2004

Soluţie: Să presupunem că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m^3 = 3n^2 + 3n + 7$. Atunci $m^3 = (n+1)^3 - n^3 + 6 \qquad (1)$.
Din teorema lui Euler (sau prin verificare directă) rezultă că un cub poate fi congruent numai cu -1, 0 sau 1 modulo 9.
Dar $3n^2 + 3n + 7 \equiv 7 \pmod 9$ dacă $n \equiv 0 \pmod 3$ sau $n \equiv 2 \pmod 3$ şi $3n^2 + 3n + 7 \equiv 4 \pmod 9$ dacă $n \equiv 1 \pmod 3$. Prin urmare $3n^2 + 3n + 7$ nu este cub perfect pentru niciun număr natural n.

Comentariu: Prezenţa a trei cuburi în relaţia (1) ne sugerează o analiză modulo 7 sau modulo 9. De ce? Din mica teoremă a lui Fermat rezultă că un cub poate fi congruent numai cu -1, 0 sau 1 modulo 7. Din teorema lui Euler rezultă că un cub poate fi congruent numai cu -1, 0 sau 1 modulo 9. Oricum, sunt numai trei variante. Analiza modulo 7 nu conduce la vreo concluzie. Însă cea modulo 9 funcţionează bine.

A se vedea şi problema 1 de la concursul „Stelele Matematicii”, ediţia 2016 (juniori).

Solution: (English)
From Euler's Theorem (or by checking all the cases) it follows that a cube can only be congruent to -1, 0 or 1 modulo 9. But $3n^2 + 3n + 7 \equiv 7 \pmod 9$ if $n \equiv 0 \pmod 3$ or $n \equiv 2 \pmod 3$, and $3n^2 + 3n + 7 \equiv 4 \pmod 9$ if $n \equiv 1 \pmod 3$. In conclusion, the equation $3n^2 + 3n + 7 = m^3$ has no integer solutions.