

Problema săptămânii 52

Ana și Bogdan joacă un joc. Ei scriu alternativ pe tablă câte un număr natural nenul mai mic sau egal cu n . Un jucător nu poate scrie pe tablă un divizor al unui număr aflat deja pe tablă. Jucătorul care nu mai poate muta pierde.

- (a) Dacă $n = 10$, care jucător are strategie câștigătoare? Precizați o asemenea strategie.
- (b) Care jucător are strategie câștigătoare dacă $n = 1000$?

Olimpiadă Rusia, 1987

Problem of the week no. 52

Anna and Boris alternately write down on the blackboard a positive integer not exceeding n . A player may not write down a divisor of any number already on the blackboard. The player unable to move loses the game. Which player has a winning strategy if

- (a) $n = 10$ (describe the strategy!);
- (b) $n = 1000$?

Russian Olympiad, 1987

Soluție

(a) Ana câștigă alegând numărul 6 la prima ei mutare. Acest procedeu elimină numerele 1, 2 și 3. Ana partiționează cele 6 numere rămase în 3 perechi: (4, 5), (8, 10), (7, 9). Dacă Bogdan va putea scrie oricare dintre aceste numere, atunci Ana va scrie celălalt număr din perechea respectivă.

(b) Să ne imaginăm un nou joc în care numărul 1 nu poate fi scris. În acest joc, unul dintre cei doi va avea o strategie de câștig. Dacă Ana are această strategie, atunci ea poate câștiga și jocul original cu aceeași strategie. Dacă Bogdan are strategie de câștig, atunci Ana poate fura strategia lui pentru jocul modificat alegând numărul 1 pentru prima ei mutare.

English Solution

(a) Anna wins by choosing 6 in her first move. This eliminates 1, 2 and 3. Anna partitions the remaining six numbers into three pairs (4, 5), (8, 10) and (7, 9). If it is possible for Boris to write down any of these numbers, Anna can always write down the other number in the same pair.

(b) Create a new game in which the number 1 may not be written. In this game, one of the players will have a winning strategy. If this is Anna, she can win the original game by using the same strategy, because after the first move, the number 1 will no longer be available. If this is Boris, then Anna can steal his strategy for the old game by choosing 1 in her first move.