Problema săptămânii 5.

Demonstraţi că:
a) orice număr natural nenul are cel puţin la fel de mulţi divizori de forma $4k+1$ ca divizori de forma $4k+3$;
b) există o infinitate de numere naturale nenule care au la fel de mulţi divizori de forma $4k+1$ ca şi divizori de forma $4k+3$;
c) există o infinitate de numere naturale nenule care au mai mulţi divizori de forma $4k+1$ decât de forma $4k+3$.

din cartea lui W. Sierpiński − 250 de probleme elementare de Teoria Numerelor

Soluţie:
a) Fie $A = 2^a p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} q_1^{b_1} \dots q_m^{b_m}$, unde p_i sunt numere prime distincte de forma $4k+1$, iar q_j sunt numere prime distincte de forma $4k+3$. Exponenţii a_i şi b_j sunt numere naturale nenule, iar $a \in \mathbb{N}$.
Divizorii de forma $4k+1$ ai lui A sunt $p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n} q_1^{y_1} \dots q_m^{y_m}$ cu $y_1 + \dots + y_m = par$, în vreme ce divizorii de forma $4k-1$ sunt cei de forma $p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n} q_1^{y_1} \dots q_m^{y_m}$ cu $y_1 + \dots + y_m = impar$.
Dacă există vreun b_j impar, divizorii impari ai lui A sunt de forma $q_j^{\alpha} \cdot N$, cu (N, q_j). Jumătate dintre aceşti divizori sunt de forma $4k+1$, ceilalţi sunt de forma $4k-1$. Într-adevăr, putem împerechea divizorul $q_j^{2m} \cdot N$ cu divizorul $q_j^{2m+1} \cdot N$, cu $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{b_j}{2}$. Unul din aceşti divizori este este de forma $4k+1$, celălalt de forma $4k+1$, deci în acest caz numărul A are la fel de mulţi divizori de forma $4k-1$ ca şi divizori de forma $4k+1$.
Dacă nu există un asemenea factor, adică toţi exponenţii b_j sunt pari, atunci putem împerechea divizorul $q_j^{2m-1} \cdot N$ cu $q_j^{2m} \cdot N$, cu $m = 1, 2, \dots, \frac{b_j}{2}$. Din nou, în fiecare pereche, unul dintre numere este de forma $4k-1$, celălalt de forma $4k+1$. Dintre divizorii impari, au rămas neîmperecheaţi divizorii de forma $p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_n^{c_n}$, cu $0 \leq c_i \leq a_1$, (sau măcar numărul 1 dacă nu există asemenea divizori) care sunt, cu toţii de forma $4k+1$. Prin urmare, în acest caz, numărul A are mai mulţi divizori de forma $4k+1$ decât divizori de forma $4k-1$, mai exact, cu $(a_1+1)(a_2+1) \dots (a_n+1)$ mai mulţi.

b) Numerele 3^{2m+1} au $m+1$ divizori de forma $4k+1$ şi $m+1$ divizori de forma $4k-1$. (Sau orice putere a lui 2 are 0 din fiecare; sau orice număr prim de forma $4k-1$ are câte un divizor de fiecare fel.)

c) Numerele 3^{2m} au $m+1$ divizori de forma $4k+1$ şi m divizori de forma $4k-1$. (Sau orice număr prim de forma $4k+1$ are doi divizori de forma $4k+1$ şi niciunul de forma $4k+1$ sau orice putere a lui 5 are numai divizori de forma $4k+1$.)

Remarci:

Fie n un număr natural impar, $D_1(n)$ numărul divizorilor de forma $4k+1$ ai lui n şi $D_3(n)$ numărul divizorilor de forma $4k+3$ ai lui n. Atunci numărul soluţiilor întregi (x, y) ale ecuaţiei $x^2+y^2=n$ este $4\big(D_1(n)-D_3(n)\big)$.

Acest rezultat implică în mod evident $D_1(n) \geq D_3(n)$ şi, în plus, justifică un alt rezultat, foarte important:

Un număr natural n se scrie sub forma unei sume de două pătrate perfecte dacă şi numai dacă toţi factorii primi de forma $4k+3$ apar la putere pară în descompunerea în factori primi a lui n.

Într-adevăr, cu rezultatul de mai sus, n este sumă de pătrate dacă şi numai dacă $D_1(n) > D_3(n)$, adică dacă şi numai dacă $D_1(n) \neq D_3(n)$. Din soluţia problemei din enunţ se vede că $D_1(n) = D_3(n)$ dacă în descompunerea lui n în factori prim există un factor prim de forma $4k+3$ la o putere impară, şi că $D_1(n) > D_3(n)$ în caz contrar.

Mai multe despre caracterizarea numerelor naturale care se scriu ca sumă de pătrate găsiţi aici:

http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/Lecture6.pdf