Problema săptămânii 49.
Fie numerele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_4}+\frac{1}{1+x_5}+\frac{1}{1+x_6}=5.$$

Să se arate că

$$\frac{1}{1+25x_1}+\frac{1}{1+25x_2}+\frac{1}{1+25x_3}+\frac{1}{1+25x_4}+\frac{1}{1+25x_5}+\frac{1}{1+25x_6}\geq 1$$

Lucian Tuţescu, Liviu Smarandache, Gazeta Matematică, nr. 2/2017, problema 27336

Problem of the week no. 49
Let $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ be positive real numbers such that

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_4}+\frac{1}{1+x_5}+\frac{1}{1+x_6}=5.$$

Prove that

$$\frac{1}{1+25x_1}+\frac{1}{1+25x_2}+\frac{1}{1+25x_3}+\frac{1}{1+25x_4}+\frac{1}{1+25x_5}+\frac{1}{1+25x_6}\geq 1$$

Lucian Tuţescu, Liviu Smarandache, Gazeta Matematică, no. 2/2017, problem 27336

Soluţia 1: Vom folosi substituţiile $y_i = \dfrac{1}{1+x_i}$, ceea ce înseamnă că $x_i = \dfrac{1}{y_i} - 1$.

Condiţia impusă devine: $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} y_i = 5$.

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{1+25x_i}=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\frac{25}{y_i}-24}=\sum_{i=1}^{6}\frac{y_i}{25-24y_i}=\sum_{i=1}^{6}\frac{y_i^2}{25y_i-24y_i^2}\geq\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{6}y_i\right)^2}{25\displaystyle\sum_{i=1}^{6}y_i-24\sum_{i=1}^{6}y_i^2}=$$

$\dfrac{25}{125-24\displaystyle\sum_{i=1}^{6}y_i^2}$. Însă din $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} y_i = 5$, obţinem din inegalitatea mediilor $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} y_i^2 \geq \frac{25}{6}$.

În concluzie, $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{1+25x_i}\geq\frac{25}{125-24\displaystyle\sum_{i=1}^{6}y_i^2}\geq\frac{25}{125-24\cdot\frac{25}{6}}=1$.

Remarcă: Funcţia $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = \dfrac{y}{25-24y}$ este convexă, aşa încât inegalitatea obţinută după substituţie este o consecinţă directă a inegalităţii lui Jensen.

Soluţia 2: Căutăm $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{1+25a} \geq \dfrac{m}{1+a} + n \qquad (*)$.
În continuare, ar trebui să obţinem $1 + a \geq m + 25ma + n + 26na + 25a^2n$. Cum egalitatea în inegalitatea iniţială se atinge pentru $a = \dfrac{1}{5}$, m şi n îndeplinesc condiţia trebuie să fie astfel încât inecuaţia de gradul II $25na^2+a(26n+25m-1)+m+n-1 \leq 0$ să fie verificată de orice $a > 0$ şi să fie satisfăcută cu egalitate pentru $a = \dfrac{1}{5}$.
Atunci trebuie ca $25na^2 + a(26n + 25m - 1) + m + n - 1 = 25n\left(a - \dfrac{1}{5}\right)^2$, de unde rezultă imediat că $m = 1$; $n = -\dfrac{2}{3}$.
Pentru această alegere a lui m şi n inegalitatea (*) este îndeplinită. Scriind-o pentru $a = x_i$, $i = \overline{1,6}$ şi adunând cele şase inegalităţi obţinem $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{1+25x_i} \geq \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{1+x_i} - \frac{2}{3} \cdot 6 = 5 - 4 = 1.$