Problema săptămânii 45.
Fie a, b, c numere reale mai mari sau egale cu 1. Arătaţi că

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$

USAJMO, 2014

Problem of the week no. 45
Let a, b, c be real numbers greater than or equal to 1. Prove that

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$

USAJMO, 2014

Soluţie:
Ar fi suficient să demonstrăm că

$$\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}\right)\left(\frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}\right)\left(\frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq (abc)^3.$$

Pentru aceasta ar fi suficient ca $\dfrac{10a^2-5a+1}{a^2-5a+10} \leq a^3$, ceea ce este echivalent cu $(a-1)^5 \geq 0$ şi este, prin urmare, evident.

English Solution