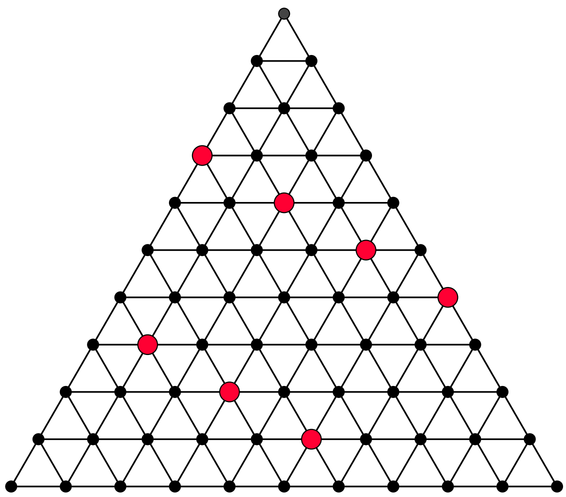
Problema săptămânii 44.
Un triunghi echilateral ABC se împarte în 100 de triunghiuri echilaterale congruente. Care este cel mai mare număr de vârfuri de triunghiuri echilaterale mici care pot fi alese astfel încât nicicare două să nu se afle pe o dreaptă paralelă cu vreo latură a triunghiului ABC?

Baltic Way, 1993

Problem of the week no. 44
An equilateral triangle ABC is divided into 100 congruent equilateral triangles. What is the greatest number of vertices of small triangles that can be chosen so that no two of them lie on a line that is parallel to any of the sides of the triangle ABC?

Baltic Way, 1993

Soluţia oficială:
Vom demonstra că numărul maxim este 7.
Un exemplu pentru 7 vârfuri este dat în figura de mai jos.
Presupunem că am ales 8 vârfuri satisfăcând condiţiile problemei. Considerăm înălţimea fiecărui triunghi echilateral mic ca fiind 1 şi notăm cu a_i, b_i, c_i distanţele de la cel de-al i-lea punct ales la laturile triunghiului ABC.
Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, 8$ avem atunci a_i, b_i, $c_i \geq 0$ şi $a_i + b_i + c_i = 10$. Astfel, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_8) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_8) = 80$. Pe de altă parte, fiecare paranteză este cel puţin $0 + 1 + \ldots + 7 = 28$, dar $3 \cdot 28 = 84 > 80$, contradicţie.



Official solution:
An example for 7 vertices is shown in the figure above.

Now assume we have chosen 8 vertices satisfying the conditions of the problem. Let the height of each small triangle be equal to 1 and denote by a_i, b_i, c_i the distances of the i-th point from the three sides of the big triangle. For any $i = 1, 2, \ldots, 8$ we then have a_i, b_i, $c_i \geq 0$ and $a_i + b_i + c_i = 10$. Thus, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_8) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_8) = 80$. On the other hand, each of the sums in the brackets is not less than $0 + 1 + \ldots + 7 = 28$, but $3 \cdot 28 = 84 > 80$, a contradiction.