Problema săptămânii 42.

a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia $n! = 2^a + 2^b$.
b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia $n! = 2^a - 2^b$.

Revista KöMaL, problemele B. 4830. şi B. 4839, propuse de *Kada Williams*

Problem of the week no. 42

a) Solve the following equation in the set of positive integers:$n! = 2^a + 2^b$.
b) Solve the following equation in the set of positive integers: $n! = 2^a - 2^b$.

KöMaL, problems B. 4830. and B. 4839, both proposed by *Kada Williams*

Soluţie:
a) O putere a lui 2 dă numai resturile 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7, deci suma a două astfel de puteri nu poate fi divizibilă cu 7. Cum $n!$ este divizibil cu 7 pentru $n \geq 7$, rezultă că $n \leq 6$.
$3! = 6$ se scrie ca $2^1 + 2^2$, deci $(a, b, n) = (1, 2, 3)$ şi $(a, b, n) = (2, 1, 3)$ sunt soluţii.
$4! = 24$ se scrie ca 2^3+2^4 (şi numai aşa), deci $(a, b, n) = (3, 4, 4)$ şi $(a, b, n) = (4, 3, 4)$ sunt soluţii.
$5! = 120$ nu se scrie ca sumă de puteri ale lui 2 (2^7 este prea mare, iar $2^6 + 2^5$ prea mic).
$6! = 720$ nu se scrie ca sumă de puteri ale lui 2 (2^{10} este prea mare, $2^8 + 2^9$ la fel, iar $2^7 + 2^9$ prea mic).
Remarcă: Cazurile cu $n \geq 5$ se pot elimina şi astfel: este evident că $n \geq 3$, deci $2^a + 2^b$ trebuie să fie divizibil cu 3, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă a şi b au parităţi diferite. Dacă $n \geq 5$, $2^a + 2^b$ trebuie să aibă ultima cifră 0. Pentru aceasta ar trebui ca 2^a şi 2^b să se termine în 2 şi 8, sau în 4 şi 6, dar în ambele situaţii a şi b ar trebui să aibă aceeaşi paritate, ceea ce nu se poate. Aşadar ecuaţia nu are soluţii pentru $n \geq 5$.

b) Evident, trebuie $a > b$. Fie $c = a - b > 0$. Ecuaţia revine la $n! = 2^b(2^c - 1)$. Să notăm cu $v_3(m)$ exponentul lui 3 din descompunerea în factori primi a numărului m. Dacă $n \geq 9$ atunci $v_3(n!) \geq \frac{n}{3}$ deoarece fiecare al treilea dintre factorii $1, 2, \ldots, n$ este divizibil cu 3, iar 9 este divizibil chiar cu 3^2, deci $v_3(n!) \geq \left[\frac{n}{3}\right] + 1 \geq \frac{n}{3}$.
Prin urmare, $v_3\big(2^b(2^c - 1)\big) = v_3(2^c - 1)$ trebuie să fie cel puţin $\frac{n}{3}$. Pentru ca $2^c - 1$ să fie divizibil cu 3 trebuie ca c să fie par. În acest caz, $c = 2d$ şi din Lifting the Exponent Lemma, $v_3(2^c - 1) = v_3(4^d - 1) = v_3(4 - 1) + v_3(d) = 1 + v_3(c)$.
Aşadar, pentru $n \geq 9$, trebuie ca $v_3(c) \geq \frac{n}{3} - 1 \overset{\text{not}}{=} x$, deci $c \geq 2 \cdot 3^x$ (c trebuie să fie

par). Dar $2^c - 1 \leq 2^b(2^c - 1) = n!$ şi $n!$ - par implică $2^c \leq n!$. Prin urmare trebuie ca $2^{2\cdot 3^{\frac{n}{3}-1}} \leq n!$.
Vom demonstra prin inducţie după n că $2^{2\cdot 3^{\frac{n}{3}-1}} > n!$ pentru orice $n \geq 10$.
Pentru $n = 10$ afirmaţia se verifică prin calcul.
Prsupunând afirmaţia adevărată pentru n, s-o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem $(n+1)! = n!(n+1) < 2^{2\cdot 3^{\frac{n}{3}-1}}(n+1) \overset{?}{\leq} 2^{2\cdot 3^{\frac{n+1}{3}-1}}$, deci ar fi suficient să demonstrăm că $n+1 \leq 2^y$, unde $y = 2\left(3^{\frac{n+1}{3}-1} - 3^{\frac{n}{3}-1}\right)$. Cum $n+1 \leq 2^n$, $\forall n \geq 1$, este suficient să demonstrăm că $n \leq y$, $\forall n \geq 10$.
Dar $y = 2\cdot 3^{\frac{n}{3}-1}\left(3^{\frac{1}{3}} - 1\right) > 0,8\cdot 3^{\frac{n}{3}-1}$, deci este suficient să arătăm că $\frac{5}{4}n \leq 3^{\frac{n}{3}-1}$, $\forall n \geq 10$.
Vom demonstra afirmaţia tot prin inducţie după n. Pentru $n = 10$ afirmaţia se verifică prin calcul.
Dacă $\frac{5}{4}n \leq 3^{\frac{n}{3}-1}$, atunci $3^{\frac{n+1}{3}-1} = 3^{\frac{n}{3}-1}\cdot 3^{\frac{1}{3}} \geq \frac{5}{4}n\cdot 3^{\frac{1}{3}} \geq \frac{5}{4}(n+1)$, ultima afirmaţie fiind adevărată pentru orice $n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \approx 2,2$.
În concluzie, am arătat că relaţia $2^{2\cdot 3^{\frac{n}{3}-1}} \leq n!$ este falsă pentru orice $n \geq 10$, prin urmare ne rămân de verificat numai cazurile cu $n \leq 9$.
Dacă $n! = 2^b(2^c - 1)$, cum $2^c - 1$ este impar, b trebuie să fie tocmai exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui $n!$, adică $b = v_2(n!)$, deci nu rămâne decât să verificăm dacă $\frac{n!}{v_2(n!)}$ este sau nu de forma $2^c - 1$.
Pentru $n = 1, 2, \ldots, 9$ aceste numere sunt $1, 1, 3, 3, 15, 45, 315, 315, 2835$ şi observăm că ele sunt de forma $2^c - 1$ numai în cazul primelor 5 numere.
Pentru $n = 1$ obţinem $b = 0$ ceea ce nu convine.
Pentru $n = 2$ obţinem $b = 1$, $c = 1$, deci $a = 2$.
Pentru $n = 3$ obţinem $b = 1$, $c = 2$, deci $a = 3$.
Pentru $n = 4$ obţinem $b = 3$, $c = 2$, deci $a = 5$.
Pentru $n = 5$ onţinem $b = 3$, $c = 4$, deci $a = 7$.

Remarcă: Dacă verificările pentru cele două inducţii de mai sus vă sunt incomode, faceţi-le pentru $n = 12$ (sunt mult mai comode, exponenţii fiind întregi). Veţi avea două cazuri în plus de verificat la final.