Problema săptămânii 4.
Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive, k dintre ele fiind subunitare, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$ find număr natural. Dacă $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$\frac{k+1}{2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n+k-1}{2}.$$

Vasile Berghea, supliment GM-B, nr. 4/2015, pb. S:L.15.133

Alte probleme cu enunţ asemănător:

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural şi $a_1, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} < n-1.$$

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n}{4}.$$

3. Arătaţi că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$, atunci

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$