Problema săptămânii 41.

Demonstraţi că dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2)(x^2y + y^2z + z^2x)(xy + yz + zx) \geq 3(x + y + z)^2x^2y^2z^2.$$

problemă dată ieri la *barajul pentru JBMO, Serbia*

Problem of the week no. 41

If x, y, z are positive real numbers, prove that

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2)(x^2y + y^2z + z^2x)(xy + yz + zx) \geq 3(x + y + z)^2x^2y^2z^2.$$

junior TST Serbia, 2017

Soluţia 1: (*Vlad Vergelea, Marian Cucoaneş*)
Putem aplica inegalitatea lui Hölder pentru trei triplete de numere:
dacă $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ sunt numere reale pozitive, atunci are loc inegalitatea:

$$(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3)(a_2^3 + b_2^3 + c_2^3)(a_3^3 + b_3^3 + c_3^3) \geq (a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3)^3.$$

Atunci:

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2)(x^2y + y^2z + z^2x)(1 + 1 + 1) \geq (xy + yz + zx)^2,$$

deci este suficient să demonstrăm că

$$(xy + yz + zx)^2 \geq 3(x + y + z)xyz$$

care este cunoscuta $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ scrisă pentru $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$.
Egalitate avem dacă şi numai dacă $x = y = z > 0$.

Soluţia 2: (*Titu Zvonaru, Marian Cucoaneş*)
Vom folosi numai inegalitatea mediilor:
Avem $xy^2+xy^2+yz^2 \geq 3y\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, $yz^2+yz^2+zx^2 \geq 3z\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ şi $zx^2+zx^2+xy^2 \geq 3x\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, care adunate, conduc la $xy^2+yz^2+zx^2 \geq (x+y+z)\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$. (1)
Apoi $x^2y+x^2y+z^2x \geq 3x\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, $y^2z+y^2z+x^2y \geq 3y\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ şi $z^2x+z^2x+y^2z \geq 3z\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, care adunate, conduc la $x^2y+y^2z+z^2x \geq (x+y+z)\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$. (2)
În fine, $xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$. (3)
Din (1), (2) şi (3) rezultă concluzia.

Soluţia 3: (*Vlad Vergelea, Horia Nicolcea, Diana Ţolu*)
Împărţind cu $x^2y^2z^2$, inegalitatea devine

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)(xy + yz + zx) \geq 3(x + y + z)^2.$$

Dar $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3$ din inegalitatea mediilor şi $\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)(xy+yz+zx)\geq (y+z+x)^2$ din inegalitatea CBS.
Prin înmulţire, obţinem inegalitatea dorită.

Soluţia 4: (*Marian Daniel Vasile*)
Din CBS avem $\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)(xy+yz+zx)\geq (y+z+x)^2$ şi $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx)\geq (x+y+z)^2$. În plus, $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$. Înmulţind aceste trei relaţii obţinem concluzia.