Problema săptămânii 40.

Un dreptunghi $m \times n$ este împărţit în pătrate unitate. Spunem că două pătrate unitate sunt vecine dacă ele au o latură comună. Pătratele unitate se completează, pe rând, astfel: mai întâi se alege un pătrat unitate şi se completează cu 0. În continuare, se alege câte un pătrat necompletat şi se completează cu numărul pătratelor vecine cu el care sunt deja completate. Această completare continuă până ce toate pătratele unitate ale dreptunghiului au fost completate. Arătaţi că suma numerelor din cele mn pătrate unitate este aceeaşi, indiferent de ordinea în care s-a făcut completarea acestora.

Problem of the week no. 40

An $m \times n$ rectangle is divided into unit squares. We say that two unit squares are neighboring squares if they share a common side. The unit squares are labeled, successively, as follows: initially, one choses a unit square and labels it with 0. Afterwards, one choses a unit square that has not been labeled yet, and labels it with the number of its already labeled neighboring squares. This process continues until all the unit squares of the rectangle have been labeled. Prove that the total sum of the labels is always the same, regardless on the order in which the squares have been labeled.

Soluţia 1:
Să ne uităm la două pătrate vecine. La un moment dat, se completează unul dintre cele două pătrate. Relaţia de vecinătate cu cel de-al doilea pătrat nu a fost luată în seamă, al doilea pătrat nefiind deocamdată completat. În schimb, când şi cel de-al doilea pătrat din pereche este completat, relaţia de vecinătate cu primul pătrat este luată în calculul stabilirii numărului care a fost scris în pătrat. Aşadar, fiecare relaţie de vecinătate între două pătrate este socotită exact o dată (şi anume la cel de-al doilea pătrăţel din pereche în ordinea completării). Aşadar, în total, suma numerelor din cele mn pătrate este egal cu numărul de perechi (neordonate) de pătrate vecine, prin urmare nu depinde de ordinea completării.

Deşi nu ni s-a cerut, putem calcula lesne acest număr: fiecare segment de lungime 1 care este latură a vreunuia din cele mn pătraţele (cu excepţia celor situate pe laturile dreptunghiului) separă o astfel de pereche de pătrate vecine. Avem $m(n-1)$ segmente verticale şi $n(m-1)$ segmente orizontale de acest fel, deci $2mn - m - n$ segmente în total.

Soluţia 2: (*Vlad Vergelea*)
Vom aplica „metoda paharelor".
Dacă avem nişte pahare, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, aşezate într-un rând, intervertind de mai multe ori câte două pahare vecine, putem obţine ca paharele să fie aşezate în orice

ordine. Într-adevăr, dacă dorim să obţinem ordinea p_{i_1}, p_{i_2}, ... , p_{i_n}, procedăm astfel: tot intervertim paharul p_{i_1} (cel pe care îl dorim să fie primul) cu paharul din stânga lui până când paharul p_{i_1} devine primul. Apoi procedăm similar cu p_{i_2} până când acesta ajunge pe poziţia a doua. Continuând procedeul, obţinem ordinea dorită.

Cum aplicăm acest procedeu?
Numerotăm pătrăţelele de la 1 la mn. Acestea vor fi paharele. Ordinea paharelor (pătrăţelelor) este ordinea în care acestea au fost completate. Demonstrăm că dacă intervertim ordinea de completare a două pătrăţele completate succesiv, suma nu se modifică.
Dacă S este suma numerelor în cazul completării pătrăţelelor în ordinea p_1, p_2, ... , p_j, p_{j+1}, ... , p_{mn}, vrem să vedem cât este această sumă în cazul completării pătrăţelelor în ordinea p_1, p_2, ... , p_{j-1}, p_{j+1}, p_j, p_{j+2}, ... , p_{mn} (am schimbat între ele două „pahare" vecine, p_j şi p_{j+1}). Fie k, respectiv ℓ numerele scrise în pătrăţelele p_j şi p_{j+1} în cazul completării lor în această ordine. Distingem două cazuri: dacă pătratele p_j şi p_{j+1} nu sunt vecine, atunci inversând ordinea de completare a celor două pătrăţele, ele vor primi aceleaşi numere, deci suma nu se schimbă. Dacă p_j şi p_{j+1} sunt vecine, atunci, schimbând ordinea de completare, mai întâi se scrie numărul $\ell - 1$ în pătratul p_{j+1}, apoi numărul $k + 1$ în pătrăţelul p_j. Nici în această situaţie, suma totală nu se schimbă.

Conform metodei paharelor, putem trece de la orice ordine de completare la oricare alta interschimbând numai câte două pătrăţele completate succesiv, iar la asemenea interschimbări suma totală nu se schimbă.

Remarcă: Veţi învăţa în clasa a XI-a că metoda paharelor se traduce prin: „orice permutare se scrie ca produs de traspoziţi de forma $(j\ j+1)$".

Remarcă: (*Radu Popescu*)
Afirmaţia din problemă rămâne adevărată şi dacă prin „pătraţele vecine" se înţelege „pătrăţele care au cel puţin un punct comun".
Demonstraţia de mai sus se adaptează foarte uşor.
În acest caz numărul total de vecinătăţi creşte cu $2(m-1)(n-1)$ (fiecare vârf de pătrat unitate nesituat pe laturile dreptunghiului separă câte două perechi de pătrate unitate vecine pe diagonală). Prin urmare, numărul total este $4mn - 3m - 3n + 2$.