Problema săptămânii 4.
Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive, k dintre ele fiind subunitare, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$ find număr natural. Dacă $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$\frac{k+1}{2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n+k-1}{2}.$$

Vasile Berghea, supliment GM-B, nr. 4/2015, pb. S:L.15.133

Soluţia 1. (*Paul Tîrlişan*)
Este uşor de văzut că este suficient să demonstrăm inegalitatea în cazul $x_j \neq 1$, $\forall\, j = \overline{1,n}$. Într-adevăr, dacă ℓ dintre numerele x_j sunt egale cu 1, omiţându-le, produsul numerelor rămase este tot 1, $\dfrac{k+1}{2}$ rămâne acelaşi, termenul din mijloc şi cel din dreapta scad cu $\dfrac{\ell}{2}$, deci este suficient să demonstrăm inegalitatea în cazul $x_j \neq 1$, $\forall\, j$.
Putem atunci presupune $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, adică $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k < 1 < x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ astfel încât $x_j = \dfrac{a_j}{a_{j+1}}$, $j = \overline{1,n}$, unde $a_{n+1} = a_1$.
Atunci $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < a_{k+1} > a_{k+2} > \ldots > a_n > a_1$ şi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} = \frac{k}{2} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{j+1} - a_j}{2(a_j + a_{j+1})} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} = \frac{k}{2} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(a_{j+1} - a_j)^2}{2(a_{j+1}^2 - a_j^2)}.$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu), obţinem că

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geq \frac{k}{2} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} (a_{j+1} - a_j) \right)^2}{2 \sum_{j=1}^{k} (a_{j+1}^2 - a_j^2)} = \frac{k}{2} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} + \frac{(a_{k+1} - a_1)^2}{2(a_{k+1}^2 - a_1^2)} = \frac{k}{2} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j + a_{j+1}} + \frac{a_{k+1} - a_1}{2(a_{k+1} + a_1)} \geq \frac{k}{2} + \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} + \frac{1}{2} - \frac{a_1}{a_{k+1} + a_1} = \frac{k+1}{2} + \left(\frac{a_1}{a_1 + a_n} - \frac{a_1}{a_{k+1} + a_1} \right) \geq \frac{k+1}{2} \text{ deoarece } a_{k+1} \geq a_n$$

(cu egalitate numai dacă $k+1 = n$, adică avem un singur termen supraunitar).
În plus, pentru a avea egalitatea în CBS trebuie ca $\dfrac{1}{a_1 + a_2} = \dfrac{1}{a_2 + a_3} = \ldots = \dfrac{1}{a_k + a_{k+1}}$, ceea ce implică $a_1 = a_3$ (dacă $k \geq 2$), ceea ce contrazice $a_1 < a_3$.

Aşadar, egalitate avem numai dacă $n = 2$ şi $k = 1$ (adică un număr subunitar şi unul supraunitar).

Inegalitatea din dreapta rezultă aplicând-o pe cea din stânga pentru numerele $\dfrac{1}{x_j}$ care au produsul 1 şi $n - k$ dintre ele sunt subunitare.

Rezultă că $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{1}{x_j}} \geq \frac{n-k+1}{2}$, adică $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j} \geq \frac{n-k+1}{2}$,

deci $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{1+x_j}\right) \geq \frac{n-k+1}{2}$ ceea ce duce la relaţia dorită.

Soluţia 2. (*Alexandru Mihalcu*)

Să presupunem că $x_1, x_2, \ldots, x_k < 1$ şi $x_{k+1}, \ldots, x_n \geq 1$.

Observăm că dacă $a, b \in (0,1]$ atunci $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{ab}$, relaţie care după calcule revine la $\dfrac{(1-a)(1-b)(1-ab)}{2(1+a)(1+b)(1+ab)} \geq 0$. (Inegalitatea este strictă dacă $a, b \in (0,1)$.)

Aplicând succesiv această proprietate numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ obţinem

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{k-1}{2} + \frac{1}{1+x_1x_2\ldots x_k}.$$

Dacă $a, b \geq 0$ atunci $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} > \dfrac{1}{1+ab}$, care după calcule revine la $1 + ab + a^2b + ab^2 > 0$. Aplicând succesiv această inegalitate pentru numerele rămase, obţinem $\dfrac{1}{1+x_{k+1}} + \ldots + \dfrac{1}{1+x_n} \geq \dfrac{1}{1+x_{k+1}\ldots x_n}$, deci $\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+x_n} \geq \dfrac{k-1}{2} + \dfrac{1}{1+x_1\ldots x_k} + \dfrac{1}{1+x_{k+1}\ldots x_n} = \dfrac{k-1}{2} + 1 = \dfrac{k+1}{2}$ deoarece dacă $AB = 1$ atunci $\dfrac{1}{1+A} + \dfrac{1}{1+B} = \dfrac{1}{1+A} + \dfrac{A}{1+A} = 1$.

Din cele de mai sus se vede că în inegalitatea din stânga putem avea egalitate numai dacă avem un singur termen ≥ 1 şi unul singur subunitar. În acest caz ($n = 2$, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$), relaţia precedentă ne arată că avem într-adevăr egalitate.

Inegalitatea din dreapta rezultă din cea din stânga, la fel ca în soluţia de mai sus. Egalitatea în aceasta din urmă are loc când avem un singur termen subunitar, unul singur supraunitar şi oricâţi termeni egali cu 1.

Soluţia 3. (*Marius Stănean*)

Demonstrez prin inducţie matematică după k afirmaţia

$P(k)$: ,,Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $x_1, \ldots, x_n > 0$ cu produsul 1, exact k dintre ele subunitare, are loc inegalitatea $\dfrac{k+1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+x_n}$."

Pentru $n = 2$ inegalitatea este adevărată pentru orice k.
Dacă $k = 1$ inegalitatea se scrie

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq 1 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\sum(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})}{2+\sum x_1 + \sum x_1x_2 + \ldots + \sum x_1x_2\ldots x_{n-1}} \geq 1$$

inegalitate evident adevărată deoarece fiecare din termenii sumei de la numitor se regăseşte şi la numărător.
Dacă $k \geq 2$ fără a restrânge generalitatea problemei putem presupune că
$x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_k \leq 1 \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n$. Avem

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x_1x_2} \Longleftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)(x_1x_2-1) \leq 0$$

evident adevărată.
Prin urmare

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{k}{2} = \frac{k+1}{2}$$

folosind ipoteza inducţiei.

Inegalitatea din dreapta rezultă uşor aplicând inegalitatea din stânga pentru
$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

Remarcă: Deşi pentru $n > 2$ nu mai avem egalitate (cel puţin în inegalitatea din stânga), constantele găsite sunt cele mai bune în sensul că în condiţiile în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt pozitive cu produsul 1 şi exact k dintre ele sunt subunitare, expresia $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j}$ poate lua valori mai mari, dar oricât de apropiate de $\frac{k+1}{2}$. Expresia ia aceste valori oricât de apropiate de $\frac{k+1}{2}$ atunci când unul dintre numere este foarte mic, aproape 0, alte $k-1$ numere sunt subunitare, dar apropiate de 1, iar celelalte $n-k$ numere sunt, de exemplu, egale.

Alte probleme cu enunţ asemănător:

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural şi $a_1, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} < n-1.$$

Este problema **190** din cartea lui **M. O. Drîmbe** – *Inegalităţi - idei şi metode.*
Soluţia 1.

Dacă toate numerele sunt egale cu 1 concluzia rezultă uşor. Dacă nu, atunci avem cel puţin un număr subunitar şi unul supraunitar, deci suntem în condiţiile problemei etapei 4. Din problema etapei rezultă că
$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\le\frac{n+k-1}{2}\le n-1.$
Ultima inegalitate este strictă dacă $k<n-1$. Dacă $k=n-1$, penultima egalitate este strictă deoarece $n\ge 3$ deci nu putem avea egalitate în problema etapei (sunt cel puţin două numere subunitare).
Soluţia 2. (bazată pe ideea din cartea lui Mihai Onucu Drîmbe)
Dacă toate numerele sunt egale cu 1 concluzia rezultă uşor. Dacă nu, printre numerele a_k există două (cu indici diferiţi) care au produsul supraunitar. (Dacă am avea $a_ia_j\le 1$, $\forall\, i,j$, prin înmulţirea tuturor acestor inegalităţi am obţine $a_1a_2\ldots a_n\le 1$, deci trebuie să avem egalitate peste tot, ceea ce conduce la cazul $x_1=\ldots=x_n=1$.) Putem presupune că $a_{n-1}a_n>1$. Atunci avem $\frac{1}{1+a_{n-1}}+\frac{1}{1+a_n}<\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}+\frac{1}{1+a_n}$ care, adunată cu inegalităţile evidente

$\frac{1}{1+a_1}<1,\ \frac{1}{1+a_2}<1,\ \ldots,\ \frac{1}{1+a_{n-2}}<1$, dă exact inegalitatea dorită.

2. Fie $n\ge 2$ un număr natural şi $a_1,\ldots,a_n$ numere reale pozitive cu $a_1a_2\ldots a_n=1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+n}{4}.$$

preluată din http://artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf
Soluţie. (*Titu Zvonaru*)
$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+n}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+a_k}{4}-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{1+a_k}\right)=-n+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+a_k}{4}+\frac{a_k}{1+a_k}\right)\ge -n+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\ge -n+n\sqrt[2n]{a_1a_2\ldots a_n}=0.$
Egalitatea are loc pentru $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

3. Arătaţi că dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n\ge 1$, atunci

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\ge\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

din cartea **D. Buşneag, I. V. Maftei** – *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*
Soluţie.
Vom demonstra inegalitatea printr-o inducţie de tip Cauchy (vezi capitolul omonim din cartea lui Mihai Onucu Drîmbe).

Dacă notăm cu $P(n)$ afirmaţia din enunţ, vom demonstra mai întâi prin inducţie propoziţia $Q(n) = P(2^n)$, apoi, fie prin inducţie înapoi (demonstrând $P(n) \Rightarrow P(n-1)$), fie direct, arătăm că $P(n)$ este adevărată şi pentru n între două puteri ale lui 2.
Pentru $n = 2$, inegalitatea se scrie după calcule $(\sqrt{a_1a_2} - 1)(\sqrt{a}_1 - \sqrt{a}_2)^2 \geq 0$ şi este evidentă pentru că $a_1a_2 \geq 1$.
Am demonstrat aşadar $Q(1) = P(2^1) = P(2)$. Demonstrăm prin inducţie că $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{n+1}} \geq 1$, atunci

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_{2^{n+1}}} = \left(\frac{1}{1+a_1} + \ldots \frac{1}{1+a_{2^n}}\right) + \left(\frac{1}{1+a_{2^n+1}} + \ldots + \frac{1}{1+a_{2^{n+1}}}\right) \overset{Q(n)}{\geq} \frac{2^n}{1+\sqrt[2^n]{a_1a_2\ldots a_{2^n}}} + \frac{2^n}{1+\sqrt[2^n]{a_{2^n+1}\ldots a_{2^{n+1}}}} \overset{Q(1)}{\geq} \frac{2^{n+1}}{1+\sqrt[2^{n+1}]{a_1\ldots a_{2^{n+1}}}}.$$

Aşadar afirmaţia $Q(n)$ este demonstrată prin inducţie.
Fie $m \in (2^n, 2^{n+1})$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 1$. Notăm $M = \sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m} \geq 1$ şi aplicăm $Q(n+1) = P(2^{n+1})$ numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m, \underbrace{M, M, \ldots M}_{2^{n+1}-m \text{ de } M}$. Obţinem că

$$\frac{1}{1+a_1} + \ldots + \frac{1}{1+a_m} + \frac{2^{n+1}-m}{1+M} \geq \frac{2^{n+1}}{1+M}, \text{ de unde } \frac{1}{1+a_1} + \ldots + \frac{1}{1+a_m} \geq \frac{m}{1+M}.$$

S-a folosit faptul că media geometrică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m, \underbrace{M, M, \ldots M}_{2^{n+1}-m \text{ de } M}$ este tot M.

În final vă mai semnalăm o dublă inegalitate interesantă, (problema **454** în cartea lui M. O. Drîmbe) legată de cele de mai sus:

Arătaţi că dacă $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$, atunci

$$\frac{n}{1 + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}} \leq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

Inegalitatea din stânga rezultă imediat din CBS, cea din dreapta fie cu o inducţie de tip Ehlers, fie cu una de tip Cauchy.