Problema săptămânii 39.

$ABCD$ şi $CEFG$ sunt dreptunghiuri cu un punct comun şi interioarele disjuncte. Laturile CD şi CG formează $\sphericalangle DCG$, $m(\sphericalangle DCG) < 90°$. Arătaţi că dacă $GG' \perp DC$, $G' \in DC$, $DD' \perp CG$, $D' \in CG$ şi $\dfrac{GG'}{BC} = \dfrac{DD'}{CE}$, atunci mediana din C a triunghiului CBE trece prin centrul cercului circumscris DCG.

Mihaela Berindeanu

Problem of the week no. 39

Let $ABCD$ and $CEFG$ be two rectangles with one common vertex and disjoint interiors. Assume $\sphericalangle DCG < 90°$. If D' and G' are the projections of D and G onto CG and CD respectively, and $\dfrac{GG'}{BC} = \dfrac{DD'}{CE}$, prove that the circumcenter of triangle CDG lies on the median from C of the triangle BCE.

Mihaela Berindeanu

Pe post de soluţie vă propun un scurt articol publicat în RMT nr. 2/2017:

DESPRE O PROBLEMĂ

de ANDREI ECKSTEIN, TIMIŞOARA

Mi s-a întâmplat uneori să rezolv o problemă fără să o înţeleg în toată profunzimea ei, să îi găsesc o soluţie care din punct de vedere matematic funcţionează, dar care nu dezvăluie nici de unde vine problema, nici ce fenomen descrie. Nu mă mulţumeşte acest gen de soluţie, motiv pentru care caut întotdeauna să înţeleg ce se ascunde de fapt în spatele fiecărei probleme („tâlcul” problemei). Desigur, nu reuşesc întotdeauna …

O problemă interesantă a fost dată anul acesta la Olimpiada Naţională de Matematică, faza pe sector (Bucureşti). Nu s-au primt rezolvări complete în concurs, aşa încât poate că ar fi interesant să înţelegem substratul acestei probleme.

Problema 1. $ABCD$ şi $CEFG$ sunt dreptunghiuri cu un punct comun şi interioarele disjuncte. Laturile CD şi CG formează $\sphericalangle DCG$, $m(\sphericalangle DCG) < 90°$. Arătaţi că dacă $GG' \perp DC$, $G' \in DC$, $DD' \perp CG$, $D' \in CG$ şi $\dfrac{GG'}{BC} = \dfrac{DD'}{CE}$, atunci mediana din C a triunghiului CBE trece prin centrul cercului circumscris DCG.

Mihaela Berindeanu

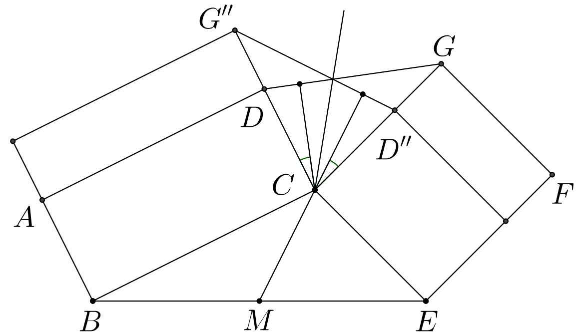
Citind-o, ea mi-a adus aminte imediat de următoarea problemă clasică:

Problema 2. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. Fie $[AM]$ mediana din A a triunghiului ABC. Demonstraţi că $AM \perp EG$.

Afirmaţia din problema 2 se extinde imediat la dreptunghiuri asemenea:

Problema 3. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, dreptunghiurile asemenea $ABDE$ şi $ACFG$ (adică astfel încât $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AG}{AC}$). Fie $[AM]$ mediana din A a triunghiului ABC. Demonstraţi că $AM \perp EG$.

Ce legătură au toate astea cu problema noastră? Noi avem că $\Delta\, DD'C \sim \Delta\, GG'C$, deci relaţia din enunţ devine $\dfrac{GC}{BC} = \dfrac{DC}{CE}$. Aşadar „lăţimile" CD şi CG ale dreptunghiurilor $ABCD$ şi $CEFG$ sunt într-adevăr proporţionale cu „lungimile" $[CB]$ şi $[CE]$ doar că, spre deosebire de problema precedentă, ele nu sunt direct proporţionale, ci invers proporţionale. Aparent nu se leagă.
Şi totuşi.



Dacă luăm D'' şi G'' simetricele punctelor D, respectiv G faţă de bisectoarea unghiului $\sphericalangle DCG$, atunci vom avea $\dfrac{CG''}{CB} = \dfrac{CD''}{CE}$ şi din Problema 2 va rezulta că $AM \perp D''G''$. Dar triunghiurile CDG şi $CD''G''$ sunt congruente, deci înălţimea în triunghiul $CD''G''$ va fi izogonala înălţimii în triunghiul CDG, deci va trece prin centrul cercului circumscris acestuia.

Pentru completitudine, să dăm demonstraţii şi celorlalte două probleme.

Demonstraţia problemei 2. (vezi Figura 1)

Fie $\{N\} = AM \cap EG$ şi A' simetricul lui A faţă de M. Atunci $ABA'C$ este paralelogram. Avem că: $AC = GA$, $A'C = BA = EA$ şi $m(\sphericalangle A'CA) = 180° - m(\sphericalangle BAC) =$

$m(\sphericalangle EAG)$, deci $\Delta\, A'CA \equiv \Delta\, EAG$ (LUL). Deducem că
$m(\sphericalangle EGA) = m(\sphericalangle A'AC) = 180° - m(\sphericalangle CAG) - m(\sphericalangle GAN) = 90° - m(\sphericalangle GAN)$,
deci din triunghiul NAG rezultă că $m(\sphericalangle ANG) = 90°$.

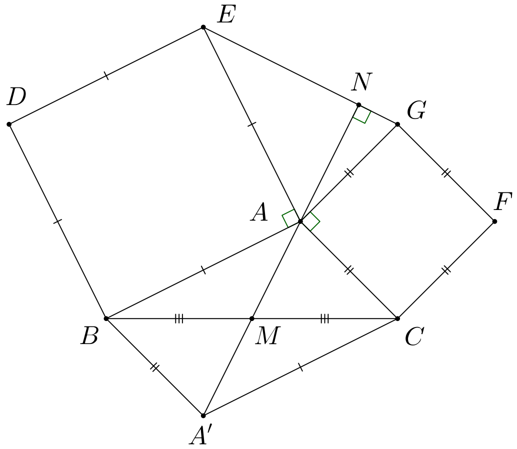


Figura 1

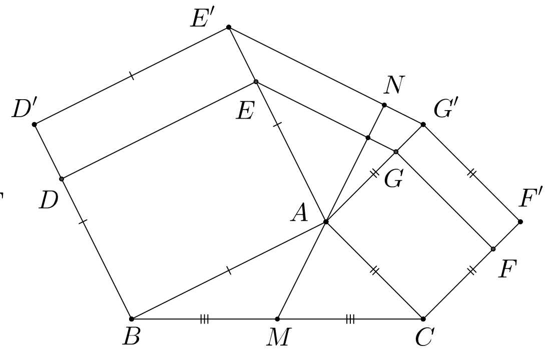


Figura 2

Demonstraţia problemei 3. (vezi Figura 2)

Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC construim, în exterior, pătratele $ABD'E'$ şi $ACF'G'$.
Avem că $\dfrac{AE}{AE'} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AG}{AC} = \dfrac{AG}{AG'}$, deci $EG \parallel E'G'$. Din problema 2 rezultă că $AM \perp E'G'$, deci AM este perpendiculară şi pe EG.