Problema săptămânii 38.
Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care $2^a + 3^b$ este pătrat perfect.

Baltic Way 1994, proba pe echipe

Problem of the week no 38.
Find all pairs of positive integers (a, b) such that $2^a + 3^b$ is the square of an integer.

Soluţia 1:
Considerând egalitatea $2^a + 3^b = n^2$ modulo 3, este uşor de văzut că a trebuie să fie par. Evident n este impar, deci punem $a = 2x$, $n = 2y + 1$ şi rescriem egalitatea sub forma $4^x + 3^b = (2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$. Atunci $3^b \equiv 1 (pmod 4)$ ceea implică $b = 2z$, cu $z \in \mathbb{N}^*$. Obţinem $4^x + 9^z = (2y + 1)^2$ şi $4^x = (2y + 1 - 3^z)(2y + 1 + 3^z)$. Ambii factori din membrul drept sunt pari, dar numai unul este multiplu de 4 (căci suma lor nu este multiplu de 4). Prin urmare, $2y+1-3^z = 2$ aşi $2y+1+3^z = 2^{2x-1}$. Aceste două egalităţi conduc la $2 \cdot 3^z = 2^{2x-1} - 2$ şi $3^z = 4^{x-1} - 1$. Evident, $x > 1$ şi examinând ultima cifră deducem că $z = 4d + 1$, $x - 1 = 2e + 1$ cu $d, e \in \mathbb{N}$. Înlocuind, obţinem $3^{4d+1} = 4^{2e+1} - 1$ şi $3 \cdot (80 + 1)^d = 4^{2e+1} - 1$. Dacă $d > 1$, atunci $e > 1$ ceea ce conduce la o contradicţie (dezvoltând expresia din membrul stâng şi trecând totul în stânga obţinem că toţi termenii sumei sunt divizibili cu 4^2). Rezultă că $e = d = 0$ şi $z = 1$, $b = 2$, $x = 2$ şi $a = 4$, adică obţinem clasicele $2^4 + 3^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$.
Aşadar răspunsul este: $a = 4$, $b = 2$.

Soluţia 2: (*Mihai Monea*) - pentru varianta, mai generală, cu $a, b \in \mathbb{N}$
Fie $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $2^a + 3^b = k^2$.
Dacă $a = 0$ avem $3^b = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$. Deci există $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, cu proprietăţile $u + v = b$, $k + 1 = 3^u$ şi $k - 1 = 3^v$. Atunci $3^u - 3^v = 2$, deci $3^v (3^{u-v} - 1) = 2$. Obţinem $v = 0$ şi $u = 1$, deci $b = 1$.
Dacă $a = 1$, evident avem $b > 0$. Atunci $2 + 3^b = \mathcal{M}_3 + 2$, deci nu e pătrat perfect.
Fie $a \geq 2$. Dacă b este impar, atunci există $c \in \mathbb{N}$ cu $b = 2c + 1$. Atunci $2^a + 3^b = 2^a + 3^{2c+1} = 2^a + 3 \cdot 9^c = 2^a + 3(8 + 1)^c = \mathcal{M}_4 + 3(\mathcal{M}_4 + 1) = \mathcal{M}_4 + 3$, deci nu este pătrat perfect.
Dacă b este par, atunci fie $c \in \mathbb{N}$ cu $b = 2c$. Obţinem $2^a + 3^{2c} = k^2$, deci $(k - 3^c)(k + 3^c) = 2^a$. Evident k este impar. Există $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, cu proprietăţile $u + v = a$, $k + 3^c = 2^u$ şi $k - 3^c = 2^v$. Prin adunare obţinem $2^u + 2^v = 2k$, deci $2^{u-1} + 2^{v-1} = k$, adică impar. Atunci $v = 1$. Rămânem cu $k + 3^c = 2^u$ şi $k - 3^c = 2$. Scăderea relaţiilor conduce la $2 \cdot 3^c = 2^u - 2$, adică $3^c = 2^{u-1} - 1$. Conform lemei de mai jos, obţinem $(u; c) \in \{(2; 0), (3; 1)\}$. De aici $(a; b) \in \{(3; 0), (4; 2)\}$
În concluzie, soluţiile problemei sunt perechile $(0; 1), (3; 0), (4; 2)$.

Lemă. *Singurele perechi* $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ *care verifică egalitatea* $2^x = 3^y + 1$ *sunt* $(1; 0)$ *şi* $(2; 1)$.
Perechile menţionate verifică eglitatea. Presupunem $y \geq 2$. Atunci $x \geq 3$, deci $2^x = \mathcal{M}_8$.

Dacă $y = 2s$ atunci $3^y + 1 = 9^s + 1 = (8+1)^s + 1 = \mathcal{M}_8 + 1 + 1 = \mathcal{M}_8 + 2 \neq \mathcal{M}_8$. Dacă $y = 2s + 1$, atunci $3^y + 1 = 3 \cdot 9^s + 1 = 3 \cdot (8+1)^s + 1 = \mathcal{M}_8 + 3 + 1 = \mathcal{M}_8 + 4 \neq \mathcal{M}_8$, ceea ce încheie demonstraţia.

Remarcă: Lema este un caz particular al Conjecturii lui Catalan:
Singura soluţie în mulţimea numerelor naturale a ecuaţiei $x^a - y^b = 1$ cu $x, a, y, b > 1$ este $x = 3$, $a = 2$, $y = 2$, $b = 3$.

Soluţia 3: (*Alexandru Ariton, Vlad Vergelea*)
Fie $a, b, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^a + 3^b = k^2$. Analizând ecuaţia modulo 3 obţinem că a trebuie să fie par, iar analizând-o modulo 4 obţinem că şi b trebuie să fie impar. Dacă $a = 2u$, $b = 2v$, cu $u, v \in \mathbb{N}^*$, atunci 2^u, 3^v şi k sunt numere pitagoreice. În plus, cum $(2^u, 3^v) = 1$, trebuie să existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^u = 2mn$, $3^v = m^2 - n^2$, $k = m^2 + n^2$.
Deducem că $mn = 2^{u-1}$, deci m şi n sunt puteri ale lui 2. Cum $3^v = m^2 - n^2$ este impar, deducem că $n = 1$, iar ecuaţia revine la $3^v = 2^{2u-2} - 1$. De aici rezultă $v = 1$, $u = 2$ (deci $x = 4$, $y = 2$) în două moduri: descompunând avem $3^v = (2^{u-1} - 1)(2^{u-1} + 1)$, deci $2^{u-1} - 1$ şi $2^{u-1} + 1$ trebuie să fie simultan puteri ale lui 3, ceea ce se poate numai dacă nuerele sunt 1 şi 3; altfel, analizând ecuaţia modulo 9 se vede că ea nu are soluţii cu $v \geq 2$. Analizând cazurile rămase se obţine imediat concluzia.