Problema săptămânii 37.
Suma numerelor reale x şi y este 1. Aflaţi valoarea maximă a expresiei $xy^4 + x^4y$.

Problem of the week no 37.
The sum of the real numbers x and y is 1. Find the maximum value of $xy^4 + x^4y$.

KöMaL

Soluţia 1.
Punând $y = 1 - x$ face expresia să fie $-3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$ care e negativă dacă x este negativ. Trebuie aşadar $x, y > 0$ şi atunci $xy\big((x+y)^3 - 3xy(x+y)\big) = p(1-3p)$, unde $p = xy$. Avem $p = x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, deci avem de aflat maximul expresiei $p(1-3p)$ atunci când $0 < p \leq \frac{1}{4}$. Din inegalitatea mediilor, $\sqrt{3p(1-3p)} \leq \frac{3p + (1-3p)}{2} = \frac{1}{2}$, deci $p(1-3p) \leq \frac{1}{12}$, cu egalitate dacă $3p = 1 - 3p$, adică $p = \frac{1}{6}$, deci pentru $\{x, y\} = \left\{\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right\}$.

Soluţia 2. (*Mihai Miculiţa*)
Avem $xy^4 + x^4y = xy(x+y)(x^2 - xy + y^2) = xy(x^2 - xy + y^2)$. Folosind că $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, avem $3xy(x^2 - xy + y^2) \leq \frac{(3xy + x^2 - xy + y^2)^2}{4} = \frac{(x+y)^4}{4} = \frac{1}{4}$, deci $xy^4 + x^4y \leq \frac{1}{12}$, cu egalitate dacă $3xy = x^2 - xy + y^2$ şi $x + y = 1$. Rezolvând sistemul format din aceste două ecuaţii se constată că valoarea $\frac{1}{12}$ se atinge pentru $\{x, y\} = \left\{\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right\}$.

Remarcă. (*Mihai Miculiţa*)
Ca la soluţia 2 de mai sus se poate arăta că $\max\limits_{x+y=1} xy^3 + x^3y = \frac{1}{8}$.

Într-adevăr, $xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \cdot 2xy(x^2 + y^2) \leq \frac{(2xy + x^2 + y^2)^2}{8} = \frac{1}{8}$, cu egalitate dacă $x + y = 1$ şi $2xy = x^2 + y^2$, deci pentru $x = y = \frac{1}{2}$.