Problema săptămânii 36.

Fiind dată o mulţime $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, avem voie să o modificăm într-unul din următoarele moduri:
(a) dacă $1 \notin S$, adăugăm mulţimii S elementul 1;
(b) dacă $n \in S$, ştergem elementul n;
(c) pentru $1 \leq r \leq n-1$, dacă $r \in S$ şi $r+1 \notin S$, ştergem elementul r şi adăugăm elementul $r+1$.
Să presupunem că este posibl ca printr-o succesiune de asemenea modificări, să obţinem o secvenţă

$$\varnothing \to \{1\} \to \{2\} \to \ldots \to \{n\},$$

care să înceapă cu $\varnothing$, să se termine cu $\{n\}$ şi care să conţină fiecare din cele 2^n submulţimi ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ exact o dată. Demonstraţi că $n = 2^m - 1$ pentru un anumit m.

Problem of the week no. 36.

Given $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, we are allowed to modify it in any one of the following ways:
(a) if $1 \notin S$, add the element 1;
(b) if $n \in S$, delete the element n;
(c) for $1 \leq r \leq n-1$, if $r \in S$ and $r+1 \notin S$, delete the element r and add the element $r+1$.
Suppose that it is possible by such modifications to obtain a sequence

$$\varnothing \to \{1\} \to \{2\} \to \ldots \to \{n\},$$

starting with $\varnothing$ and ending with $\{n\}$, in which each of the 2^n subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ appears exactly once. Prove that $n = 2^m - 1$ for some m.