Problema săptămânii 36.
Fiind dată o mulţime $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, avem voie să o modificăm într-unul din următoarele moduri:
(a) dacă $1 \notin S$, adăugăm mulţimii S elementul 1;
(b) dacă $n \in S$, ştergem elementul n;
(c) pentru $1 \leq r \leq n-1$, dacă $r \in S$ şi $r+1 \notin S$, ştergem elementul r şi adăugăm elementul $r+1$.
Să presupunem că este posibl ca printr-o succesiune de asemenea modificări, să obţinem o secvenţă

$$\varnothing \to \{1\} \to \{2\} \to \ldots \to \{n\},$$

care să înceapă cu $\varnothing$, să se termine cu $\{n\}$ şi care să conţină fiecare din cele 2^n submulţimi ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ exact o dată. Demonstraţi că $n = 2^m - 1$ pentru un anumit m.

Problem of the week, no. 36.

Given $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, we are allowed to modify it in any one of the following ways:
(a) if $1 \notin S$, add the element 1;
(b) if $n \in S$, delete the element n;
(c) for $1 \leq r \leq n-1$, if $r \in S$ and $r+1 \notin S$, delete the element r and add the element $r+1$.
Suppose that it is possible by such modifications to obtain a sequence

$$\varnothing \to \{1\} \to \{2\} \to \ldots \to \{n\},$$

starting with $\varnothing$ and ending with $\{n\}$, in which each of the 2^n subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ appears exactly once. Prove that $n = 2^m - 1$ for some m.

Cecil Rousseau, propusă pentru USAMO 2000

Soluţie:
Să observăm că la fiecare modificare de tipul (a) sau (c) suma elementelor lui S creşte cu 1, în timp ce la efectuarea unei modificări de tipul (b) ea scade cu n. De-a lungul succesiunii de modificări care produce secvenţa $\varnothing \to \{1\} \to \{2\} \to \ldots \to \{n\}$ conţinând toate submulţimile lui $\{1, 2, \ldots, n\}$, suma creşte în final cu n. Dacă se fac k modificări de tip b, deci $2^n - k - 1$ modificări de tip (a) şi (c), suma creşte cu $2^n - k - 1 - kn = n$. Aşadar $(n+1)(k+1) = 2^n$, adică $n+1$ este o putere a lui 2.

Remarcă: Demonstraţia de mai sus nu elucidează dacă în cazul $n = 2^m - 1$ chiar există pentru orice m o succesiune de modificări precum cea dorită.
Pentru $m = 1$ există succesiunea $\varnothing \to \{1\}$.

Pentru $m = 2$ nu există o succesiune bună. Orice succesiune trebuie, obligatoriu, să înceapă cu $\varnothing \to \{1\} \to \{2\}$ şi să se termine cu $\{2\} \to \{3\}$, deci celelalte submulţimi nu se pot obţine fără a trece de cel puţin două ori prin mulţimea $\{2\}$.
Aşadar, asemenea succesiuni există pentru unele din numerele de forma $2^m - 1$ şi nu există pentru altele.