Problema săptămânii 34.

Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, definim $f(x,y) =$ distanţa de la $|x-y|$ la cel mai apropiat întreg, iar pentru o mulţime finită $M \in [0,1]$ definim

$$s(M) = \sum_{\substack{x,y \in M \\ x<y}} f(x,y).$$

Determinaţi valoarea maximă pentru $s(M)$ când M parcurge familia mulţimilor cu 4 elemente.

Dinu Şerbănescu, Concursul „Alexandru Myller”, Iaşi, 2009

Soluţia oficială din concurs:

Avem $f(x,y) = \min\{|x-y|,\ 1-|x-y|\} \leq \frac{1}{2}$.

Dacă $M = \{a,b,c,d\}$, $a<b<c<d$, atunci $f(a,b)+f(b,c)+f(c,a) \leq (b-a)+(c-b)+(d-c) = d-a$ şi $f(a,d) \leq 1+a-d$, deci $f(a,b)+f(b,c)+f(c,d)+f(a,d) \leq 1$. De asemenea, $f(a,c) \leq \frac{1}{2}$ şi $f(b,d) \leq \frac{1}{2}$, deci $s(M) \leq 2$.

Pe de altă parte, pentru $M = \left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right\}$ (sau orice mulţime $M = \{a,b,c,d\}$, cu $0 \leq a<b<c<d \leq 1$, $c = a+\frac{1}{2}$ şi $d = b+\frac{1}{2}$) avem $s(M) = 2$, deci maximul cerut este 2.

Comentarii:

Probleme similare se pot formula şi pentru alte valori ale lui n (de exemplu pentru $n=3$ şi $n=6$).

Pentru $n=6$ răspunsul este 4,5: Avem $f(a,b)+f(b,c)+f(c,d)+f(d,e)+f(e,f)+f(a,f) \leq 1$, $f(a,c)+f(c,e)+f(a,e) \leq 1$, $f(b,d)+f(d,f)+f(b,f) \leq 1$, $f(a,d) \leq \frac{1}{2}$, $f(b,e) \leq \frac{1}{2}$ şi $f(c,f) \leq \frac{1}{2}$ care adunate arată că $s(M) \leq 4,5$ pentru orice mulţime $\{a,b,c,d,e,f\}$ cu $a<b<c<d<e<f$. Această valoare se atinge, de exemplu, pentru $M = \left\{0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{10},\ \frac{9}{10}\right\}$.

În principiu, nu este obligatoriu ca în cazul unui n oarecare fixat să existe un asemenea maxim. E posibil să existe o constantă c_n astfel ca $s(M) < c_n$ pentru orice M, mulţime cu n elemente, dar, pentru orice $c < c_n$ să existe deja M astfel încât $s(M) > c$. În acest caz c_n ar fi o „cea mai bună constantă”, dar nu un maxim. Problema existenţei unui maxim în cazul general precum şi determinarea valorii acestua rămâne deschisă.

Andrei Pantea are o abordare pe cazuri care se poate extinde şi pentru $n > 4$. Pentru $n = 4$ sunt 5 sau 6 cazuri de tratat. Pentru $n = 5$, tratând 14 cazuri, el găseşte că maximul căutat este 3. El conjecturează că răspunsul este în general:

$\dfrac{k^2}{2}$ dacă $n = 2k$ şi $\dfrac{k(k+1)}{2}$ dacă $n = 2k+1$.