Problema săptămânii 33.

Arătaţi că pentru orice numere reale pozitive x, y, z au loc inegalităţile:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq \frac{z(y+x)}{y(y+z)}+\frac{x(z+y)}{z(z+x)}+\frac{y(x+z)}{x(x+y)}, \qquad (1)$$

baraj Rep. Moldova, 2013

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq \frac{x(y+z)}{y(z+x)}+\frac{y(z+x)}{z(x+y)}+\frac{z(x+y)}{x(y+z)} \qquad (2).$$

postată de user sqing pe AoPS

DEMONSTRAŢII ALE INEGALITĂŢII (1)

Soluţia 1: (*Vlad Vergelea, Răzvan Puşcaşu, Marian Daniel Vasile, Paul Becsi*)

Deoarece $\frac{x}{y}-\frac{z(y+x)}{y(y+z)}=\frac{x}{y+z}-\frac{z}{y+z}$ şi încă două relaţii similare, relaţia (1) revine la

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{x}{z+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z} \qquad (3).$$

Am primit mai multe demonstraţii pentru inegalitatea (3):

- Eliminând numitorii, (3) devine $x^3+y^3+z^3 \geq xy^2+yz^2+zx^2$, care rezultă fie din inegalitatea rearanjamentelor (tripletele (x, y, z) şi (x^2, y^2, z^2) sunt la fel ordonate), fie din inegalitatea mediilor: avem $x^3+y^3+y^3 \geq 3xy^2$ şi analoagele care adunate conduc la inegalitatea dorită.
- Inegalitatea (3) rezultă şi ea direct din inegalitatea rearanjamentelor: tripletele (x, y, z) şi $\left(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}\right)$ sunt la fel ordonate.
- Adunând $\frac{z}{z+x}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}$ în ambii membri ai inegalităţii (3), ea devine

$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y} \geq 3$$

care rezultă imediat din inegalitatea mediilor.

La inegalitatea de mai sus se ajunge şi direct, scriind
$\frac{z(y+x)}{y(y+z)}=\frac{[(y+z)-y](y+x)}{y(y+z)}=\frac{y+x}{y}-\frac{y+x}{y+z}=1+\frac{x}{y}-\frac{x+y}{y+z}$ şi analoagele.

Soluţia 2: (*Andrei Pantea, Vlad Vergelea*)

Notăm $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ şi inegalitatea (1) devine

$$a+b+c \geq \frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1},$$

unde $a, b, c > 0$ satisfac $abc = 1$.
Vă prezentăm două demonstraţii ale acestei inegalităţi:
• Eliminând numitorii, ajungem la $a^2b + b^2c + c^2a \geq a + b + c$. Inegalitatea rezultă din $a^2b + a^2b + c^2a \geq 3\sqrt[3]{a^5b^2c^2} = 3a$ adunată cu analoagele ei.
• $a+b+c \geq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{ab-1}{b+1} + \frac{bc-1}{c+1} + \frac{ca-1}{a+1} \geq 0$. Adunăm 3 în ambii membri şi obţinem $\frac{b(a+1)}{b+1} + \frac{c(b+1)}{c+1} + \frac{a(c+1)}{a+1} \geq 3$, care rezultă imediat din inegalitatea mediilor.

DEMONSTRAŢII ALE INEGALITĂŢII (2)

Soluţia 1: (*Vlad Vergelea, Răzvan Puşcaşu, Marian Daniel Vasile*)
Scriem inegalitatea (2) sub forma

$$\frac{x(x-y)}{y(z+x)} + \frac{y(y-z)}{z(x+y)} + \frac{z(z-x)}{x(y+z)} \geq 0 \qquad (4).$$

Eliminând numitorii se ajunge la

$$x^4yz + y^4zx + z^4xy + x^2y^4 + y^2z^4 + z^4x^2 \geq x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2 + 3x^2y^2z^2 \qquad (5).$$

Putem demonstra inegalitatea de mai sus cu inegalitatea mediilor, de exemplu prin următoarele două moduri:
• $x^4yz + xy^4z + xyz^4 \geq 3x^2y^2z^2$, deci este suficient să demonstrăm că $\sum_{cicl} x^2y^4 \geq \sum_{cicl} xy^2z^3$. Acest lucru rezultă din adunarea relaţiei $\frac{1}{6}\,x^2y^4 + \frac{4}{6}\,y^2z^4 + \frac{1}{6}\,z^2x^4 \geq xy^2z^3$ (inegalitatea ponderată a mediilor) cu analoagele.
Alternativ, $\sum_{cicl} x^2y^4 \geq \frac{\sum_{cicl} x^4y^6z^2}{x^2y^2z^2} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum_{cicl} xy^2z^3\right)^2}{3x^2y^2z^2} \geq \sum_{cicl} xy^2z^3$ din inegalitatea mediilor.
• Scriem inegalitatea $x^4yz + x^4yz + xyz^4 \geq 3x^3yz^2$ şi analoagele ei, apoi folosim că $x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 \geq 3x^2y^2z^2$.
• Cu alte cuvinte, inegalitatea (5) este de forma $S_1 + S_2 \geq S_3 + S_4$ unde, se vede din cele două soluţii de mai sus, $\min\{S_1, S_2\} \geq \max\{S_3, S_4\}$.
• Altă demonstraţie pentru (4):
Adunăm 3 în ambii membri şi (4) devine

$$\frac{x^2+yz}{y(z+x)} + \frac{y^2+zx}{z(x+y)} + \frac{z^2+xy}{x(y+z)} \geq 3.$$

Este suficient să demonstrăm că media geometrică a celor trei numere din membrul stâng este cel puţin 1, adică este suficient ca

$$(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy) \geq xyz(x+y)(y+z)(z+x)$$

care rezultă din înmulţirea inegalităţii $(x^2+yz)(y^2+zx) \geq xy(x+z)(y+z)$ cu analoagele ei. (Ultima inegalitate revine la $z(x-y)^2(x+y) \geq 0$.)

Soluţia 2: (*Andrei Pantea, Vlad Vergelea*)
Notăm $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$ şi inegalitatea (2) devine

$$a+b+c \geq \frac{bc+1}{b+1} + \frac{ca+1}{c+1} + \frac{ab+1}{a+1},$$

unde $a, b, c > 0$ satisfac $abc = 1$.
Calculele reduc această inegalitate la $a^2+b^2+c^2+a^2b+b^2c+c^2a \geq a+b+c+3$.
• Finalizarea 1: Dar $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt[3]{abc}(a+b+c) = a+b+c$ (din inegalitatea lui Muirhead avem $[2,0,0] \geq \left[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$), iar $a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc = 3$.
• Finalizarea 2: Avem $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$ şi $a^2b+b^2c+c^2a \geq a+b+c$ (demonstrată la Soluţia 2 de la inegalitatea (1)).
• Cu alte cuvinte, inegalitatea (4) este de forma $S_1+S_2 \geq S_3+S_4$ unde, se vede din cele două soluţii de mai sus, $\min\{S_1, S_2\} \geq \max\{S_3, S_4\}$.

COMENTARII FINALE

Inegalitatea (2) este mai slabă decât (1):

$$\frac{z(y+x)}{y(y+z)} + \frac{x(z+y)}{z(z+x)} + \frac{y(x+z)}{x(x+y)} \geq \frac{x(y+z)}{y(z+x)} + \frac{y(z+x)}{z(x+y)} + \frac{z(x+y)}{x(y+z)}.$$

Într-adevăr,
$$\sum\left(\frac{z(y+x)}{y(y+z)} - \frac{z(x+y)}{x(y+z)}\right) = \sum\frac{z(x^2-y^2)}{xy(y+z)} = \frac{x^4z^2+y^4x^2+z^4y^2-3x^2y^2z^2}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 0$$
(ultima identitate se arată prin calcul).

Inegalitatea (2) este echivalentă cu următoarea inegalitate (Belarus 1997 şi India 2012):
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+c} \qquad (6).$$
Într-adevăr, cu substituţia $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$, $z = \dfrac{1}{c}$, (2) devine (6).