Problema săptămânii 32.

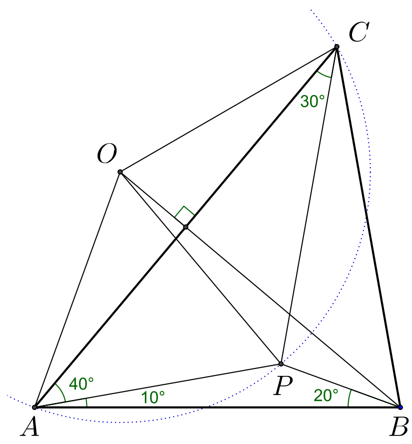
Fie triunghiul ABC şi un punct P în interiorul său astfel încât

$$m(\angle PAC) = 40^\circ,\ m(\angle PCA) = 30^\circ,\ m(\angle PBA) = 20^\circ,\ m(\angle PAB) = 10^\circ.$$

Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

USAMO 1996

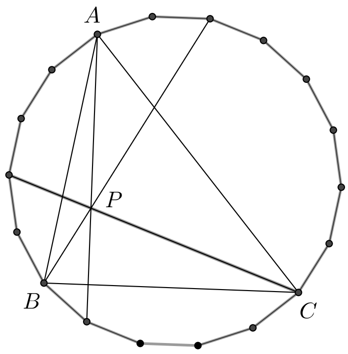
Soluţia 1:
Fie O simetricul lui A faţă de BP; triunghiul AOP este echilateral, deoarece $PA = PO$ şi $m(\angle APO) = 2\big(m(\angle PBA) + m(\angle PAB)\big) = 60^\circ$. Rezultă că $m(\angle OAC) = m(\angle OAP) - m(\angle PAC) = 20^\circ$. Dar $\triangle ABO$ este isoscel cu vârful în B şi $m(\angle BOA) = m(\angle BAO) = 70^\circ$. Din relaţiile de mai sus deducem că $OB \perp AC$. Dar O este centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle ACP$, fiindcă $m(\angle PCA) = 30^\circ$ şi $m(\angle POA) = 60^\circ$, de unde $OA = OC$. Rezultă atunci că OB este mediatoarea segmentului $[AC]$, astfel că $m(\angle BCA) = m(\angle BAC) = 50^\circ$ şi $m(\angle ABC) = 80^\circ$.



English version:

Take O the reflection of A in BP; triangle AOP is equilateral, since $PA = PO$ and $\angle APO = 2(\angle PBA + \angle PAB) = 60^\circ$. It follows $\angle OAC = \angle OAP - \angle PAC = 20^\circ$. Now, $\triangle ABO$ is isosceles at B, with $\angle BOA = \angle BAO = 70^\circ$. From the relations above we thus infer $OB \perp AC$. But O is the circumcentre of $\triangle ACP$, since $\angle PCA = 30^\circ$ and $\angle POA = 60^\circ$, therefore $OA = OC$. We then see that OB is the perpendicular bisector of AC, therefore $\angle BCA = \angle BAC = 50^\circ$ and $\angle ABC = 80^\circ$.

Cum se poate vedea mai jos, problema originează dintr-o configuraţie într-un poligon regulat cu 18 laturi. ■

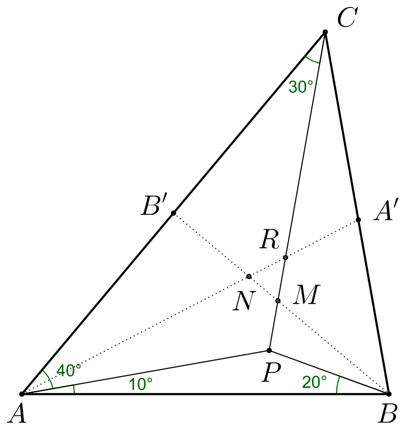


Soluţia 2: (*Dan Schwarz*)
Rezultă imediat că $m(\angle PBC) + m(\angle PCB) = 80°$. Notând $m(\angle PBC) = \theta$, prin aplicarea repetată a teoremei sinusurilor obţinem $\sin\theta \cdot \sin 10° \cdot \sin 30° = \sin(80° - \theta) \cdot \sin 20° \cdot \sin 40°$, cu soluţia unică $\theta = 60°$, deci unghiurile triunghiului ABC sunt $m(\angle BCA) = m(\angle BAC) = 50°$ şi $m(\angle ABC) = 80°$ ($\triangle ABC$ este isoscel în B). Aceasta este deoarece ecuaţia

$$\sin\theta \cdot \sin 10° \cdot \sin 30° = \sin(80° - \theta) \cdot \sin 20° \cdot \sin 40° \text{ în } \theta \in [0°, 80°] \qquad (1)$$

are termenul stâng crescător şi cel drept descrescător, deci are soluţie unică. ■
Observaţie: Relaţia (1) rezultă direct din teorema lui Ceva în forma ei trigonometrică.

Soluţia 3: (*Aisel Abibula*)
Fie $A' \in (BC$ şi $B' \in (AC$ astfel încât $m(\sphericalangle PAA') = 10°$ şi $m(\sphericalangle PBB') = 20°$. Notăm $\{M\} = BB' \cap CP$, $\{N\} = AA' \cap BB'$, $\{R\} = AA' \cap CP$.
Se obţin succesiv următoarele măsuri de unghiuri:
$m(\sphericalangle BAB') = 50°$, $m(\sphericalangle ABB') = 40°$, $m(\sphericalangle AB'B) = 90°$, $m(\sphericalangle NAB') = 30°$, $m(\sphericalangle ANB') = 60°$, $m(\sphericalangle CMB') = 60°$.
Aşadar, în triunghiul MNR avem $m(\sphericalangle M) = m(\sphericalangle N) = 60°$, deci triunghiul MNR este echilateral. Dar în triunghiul ANB $(AP$ şi $(BP$ sunt bisectoare, deci P este centrul cercului înscris. Atunci $m(\sphericalangle PNA) = m(\sphericalangle PNM) = 60°$. Dar $m(\sphericalangle ANP) = m(\sphericalangle ARP) = 60°$ implică $R = N$, deci $R = N = M$, adică AA', BB' şi CP sunt concurente. Cum $m(\sphericalangle RAC) = m(\sphericalangle RCA) = 30°$, R şi B' se află pe mediatoarea lui $[AC]$. Cum $B \in RB'$, deducem că triunghiul ABC este isoscel, deci $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 50°$ şi $m(\sphericalangle B) = 80°$.



Remarcă: Foarte des, probleme care implică triunghiuri isoscele având la vârf un unghi de $\dfrac{360}{n}$ grade provin din proprietăţi ale poligonului regulat cu n grade. Convine atunci, poate, să considerăm cele n triunghiuri isoscele congruente cu cel dat care au acelaşi vârf şi interioarele disjuncte.

Vezi şi aplicaţii ale acestei idei la rezolvarea a două probleme clasice implicând triunghiul isoscel cu vârful de 20°:

http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/Classical8.shtml
http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/Classical11.shtml
http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/Classical12.shtml
http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/LongSol1.shtml
http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/LongSol3.shtml

Problema mi-a fost semnalată de regretatul *Dan Schwarz*.