Problema săptămânii 31.

Spunem despre două numere naturale a şi b că sunt *înfrăţite* dacă a divide b^2+b+1 şi b divide a^2+a+1. (Astfel, de exemplu, numerele 1 şi 1 sunt înfrăţite la fel cum sunt şi 1 cu 3.) Arătaţi că există o pereche de numere înfrăţite formată din numere mai mari ca 1000.

Problem of the week no. 31 (English):

Let us say that positive integers a and b are *related* if b^2+b+1 is a multiple of a and also a^2+a+1 is a multiple of b. (Thus, for example 1 and 1 are related, as are 1 and 3.) Show that there exists a pair of related integers both of which exceed 1000.

For the English solution, see here:
https://www.math.wisc.edu/talent/sites/default/files/T08-5a_1.pdf

Soluţie:
Pornim de la o pereche (a, b) de numere înfrăţite cu $a \leq b$ şi construim o pereche (b, c) de numere înfrăţite, cu $b < c$. Repetând acest procedeu, pornind mereu de la ultima pereche găsită, vom găsi un şir infinit de perechi de numere înfrăţite.[1] (Este evident că obţinem mereu perechi noi, care nu au mai fost considerate anterior.) Deoarece cel mai mic număr din pereche creşte mereu cu cel puţin 1, vom ajunge la perechi de numere înfrăţite mai mari ca 1000.
Iniţial pornim de la o pereche cunoscută de numere înfrăţite, de exemplu de la $(a, b) = (1, 1)$.
Să remarcăm că orice două numere înfrăţite sunt relativ prime. Dacă a şi b sunt înfrăţite şi $d \mid a$, $d \mid b$, atunci $d \mid b^2 + b + 1$ şi $d \mid b$, deci $d \mid 1$.
Dacă $a \leq b$, alegem $c = \dfrac{b^2+b+1}{a} \in \mathbb{N}$. Avem $c > \dfrac{b^2}{a} \geq b$. Arătăm că b şi c sunt înfrăţite. Evident, din $ac = b^2 + b + 1$ se vede că $c \mid b^2 + b + 1$, deci mai rămâne să arătăm că $b \mid c^2 + c + 1$. Cum $(a, b) = 1$, pentru a arăta că b divide $c^2 + c + 1$ este suficient să arătăm că b divide $a^2(c^2 + c + 1)$. Dar $a^2(c^2 + c + 1) = (ac)^2 + a \cdot ac + a^2 = (b^2 + b + 1)^2 + a(b^2 + b + 1) + a^2 = b^4+2b^3+3b^2+2b+1+ab^2+ab+a+a^2 = M_b+(1+a+a^2) = M_b$, de unde concluzia.

Remarcă: Pornind de la perechea $(1, 1)$ de numere înfrăţite, obţinem prin procedeul de mai sus, succesiv, perechile de numere înfrăţite: $(1, 3)$, $(3, 13)$, $(13, 61)$, $(61, 291)$, $(291, 1393)$ şi $(1393, 6673)$ - ultima fiind o pereche de numere înfrăţite mai mari ca 1000. Sigur, o soluţie corectă şi mult mai scurtă a problemei ar fi putut fi:
,,Observăm" că numerele 1393 şi 6673 sunt numere înfrăţite mai mari ca 1000.

[1] Seamănă cu tehnica de la *Vieta jumping*.

Alte idei, desprinse din rezolvările trimise de *Răzvan Puşcaşu* şi *Dan Dumitrescu*

1. Observăm că $a \mid b^2+b+1$ şi $b \mid a^2+a+1$ dacă şi numai dacă $ab \mid a^2+b^2+a+b+1$. Într-adevăr, dacă $a \mid b^2+b+1$ şi $b \mid a^2+a+1$, atunci $ab \mid (a^2+a+1)(b^2+b+1)$, adică $ab \mid ab(ab+a+b+1)+(a^2+b^2+a+b+1)$, deci $ab \mid a^2+b^2+a+b+1$. Reciproc, dacă $ab \mid a^2+b^2+a+b+1$, atunci $a \mid a^2+b^2+a+b+1$, deci $a \mid b^2+b+1$ şi analog $b \mid a^2+a+1$.

2. Căutăm aşadar perechi (a, b) pentru care există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $abm = a^2+b^2+a+b+1$. Vom arăta că există o infinitate de asemenea perechi cu $m = 5$. Dacă (a, b) şi (b, c) sunt două perechi care verifică relaţia de mai sus cu $m = 5$, atunci $5ab = a^2+b^2+a+b+1$ şi $5bc = b^2+c^2+b+c+1$. Scăzând aceste relaţii şi împărţind cu $a-c$ (vrem ca $\{a, b\} \neq \{b, c\}$), obţinem că $5b = a+c+1$. Avem şi reciproc: dacă $5ab = a^2+b^2+a+b+1$ şi alegem $c = 5b-a-1$, atunci $5bc = b^2+c^2+b+c+1$.
În concluzie, este suficient să pornim de la o pereche (a, b) de numere înfrăţite şi ne putem construi o altă pereche, (b, c), unde $c = 5b-a-1$.
Să mai observăm că dacă $a \leq b$, atunci $b < c$: $c-b = 4b-a-1 = (b-a)+(b-1)+2b > 0$. Aşadar, fiecare pereche ,,produsă” conţine numere mai mari decât perechea precedentă, deci perechile obţinute nu se repetă.
Vedem din cele de mai sus că un număr b poate fi înfrăţit cu cel mult două numere: dacă b este înfrăţit cu a şi c, atunci $a+c = 5b-1$. Atunci, fie că de la o pereche $\{a, b\}$ de numere înfrăţite, cu $a < b$, construim perechea (b, c) cu $b < c$ punând $c = 5b-a-1$ sau punând $c = \dfrac{b^2+b+1}{a}$, trebuie să obţinem acelaşi număr c.

Altfel spus, dacă definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1}-a_n-1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, şirul este strict crescător şi, din cele de mai sus, se vede că perechile $(a_n,\ a_{n+1})$ sunt formate din numere înfrăţite pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Se poate stabili o formulă pentru (a_n), şi anume

$$a_n = \alpha\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n + \frac{1}{3},$$

unde α şi β se află din condiţia $a_1 = a_2 = 1$.

Perechile de mai sus sunt de fapt singurele perechi de numere înfrăţite.
Demonstraţie: (după ideea lui *Vlad Vergelea*)
Presupunând că ar există şi alte perechi, $\{x, y\}$, de numere înfrăţite, alegem una care nu este formată din doi termeni consecutivi ai şirului de mai sus şi care are suma $x+y$ minimă. Evident $x = y$ nu se poate (singura pereche de numere înfrăţite egale, $(1, 1)$, e formată din termeni consecutivi ai şirului), deci putem presupune $x > y$. Fie $z = \dfrac{y^2+y+1}{x}$. Ştim că $z \in \mathbb{N}^*$ şi, evident, z divide y^2+y+1. Arătăm

că y divide z^2+z+1, că $y+z < x+y$ şi că $\{y, z\}$ nu sunt de forma $\{a_n, a_{n+1}\}$. Cum x şi y trebuie să fie relativ prime, este suficient să arătăm că y divide $x^2(z^2+z+1) = (xz)^2 + x \cdot xz + x^2 = (y^2+y+1)^2 + x(y^2+y+1) + x^2 = Ny + (x^2+x+1)$, ceea ce rezultă din faptul că x şi y sunt înfrăţite. Apoi $z < x \Leftrightarrow zx < x^2 \Leftrightarrow y^2+y+1 < x^2$, lucru care rezultă din $y + 1 \leq x$ (avem $y^2 + y + 1 < y^2 + 2y + 1 \leq x^2$). În fine, dacă $(z, y) = (a_n, a_{n+1})$, atunci, am văzut mai sus, $(y, x) = (a_{n+1}, a_{n+2})$, ceea ce contrazice faptul că perechea $\{y, z\}$ n-ar fi formată din termeni consecutivi ai şirului.
O generalizare interesantă este studiată în acest articol:
http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.pjm/1103051516

Titu Zvonaru se semnalează că problema a apărut şi în Crux Mathematicorum[2] (nr. 7/2004) şi în revista KöMaL. Eu am preluat-o de pe site-ul unui concurs din Wisconsin (SUA), site la care trimit şi cu soluţia în limba engleză.

[2] W. W. Chao, Problem 2981, Crux Mathematicorum, 30 (2004), p. 430.