

Problema săptămâni 30.

Știu că populația unui anumit sat constă din 100 de oameni (pământeni) și 15 extraterestri. Când vizitez satul, eu nu pot să disting între oameni și extraterestri, dar vreau să găsesc pe cineva de care să fiu sigur că este pământean. Rog fiecare sătean să-mi dea o listă cu numele a 15 locuitori care sunt pământeni. Autonomizările sunt permise. Fiecare sătean trimite lista cu cele 15 nume, dar, în vreme ce pământenii au trecut pe liste numai numele altor pământeni, nu sunt sigur dacă și extraterestri au făcut același lucru. Demonstrați că pot identifica un pământean examinând cele 115 liste ne semnate.

Problem of the week no. 30 (English):

I know that the population of a certain village consists of 100 humans and 15 extraterrestrial aliens. When I visit the village, I am unable to distinguish the humans from the aliens, but I want to find someone who I am sure is human. I ask each villager to give me the names of some human residents, allowing self-nominations. Everyone submits a list of 15 names, but while the humans' lists contain only the names of humans, I have no such assurance about the aliens' lists. Show that I can select a human when I examine the 115 unsigned lists.

Soluție:

(English solution is available here:

https://www.math.wisc.edu/talent/sites/default/files/T10-4a_1.pdf)

- Dacă există vreun nume care apare de cel puțin 16 ori, atunci acesta a fost nominalizat de către cel puțin un pământean, deci este numele unui pământean.
- Dacă niciun nume nu apare pe listă de 16 ori, cum fiecare nume apare, în medie, pe 15 liste, rezultă că fiecare nume apare în total pe liste de exact 15 ori. Așadar, fiecare extraterestru a fost nominalizat de către fiecare extraterestru, deci extraterestrii au furnizat 15 liste identice. Pentru a găsi un pământean, formăm grupe de liste identice. Eliminăm grupele formate din câte 15 liste identice. Acestea ar putea fi listele extraterestrilor. Cum 115 nu este divizibil cu 15, există liste care nu fac parte din grupe de 15 liste identice. Toate persoanele de pe aceste liste sunt pământeni.

Comentarii: (*Vlad Vergelea*)

1. Putem generaliza problema astfel:

Știu că populația unui anumit sat constă din p de oameni (pământeni) și x extraterestri. Când vizitez satul, eu nu pot să disting între oameni și extraterestri, dar vreau să găsesc pe cineva de care să fiu sigur că este pământean. Rog fiecare sătean să-mi dea o listă cu numele a x locuitori care sunt pământeni. Autonomi-

nalizările sunt permise. Fiecare sătean trimite lista cu cele x nume, dar, în vreme ce pământeni au trecut pe liste numai numele altor pământeni, nu sunt sigur dacă și extraterestri au făcut același lucru. Demonstrați că dacă $p > x$ și p nu este divizibil cu x , atunci pot identifica un pământean examinând cele $p + x$ liste nesemnate.

Generalizarea se demonstrează exact la fel ca și problema săptămânii, meritul ei este acela că subliniază exact care este condiția pe care p și x trebuie să o verifice pentru ca afirmația din problemă să rămână adevărată. Evident, condiția $p \geq x$ este necesară pentru că altfel pământeni nu pot furniza o listă formată numai din pământeni. Și condiția ca p să nu fie divizibil cu x este necesară. În caz contrar am putea grupa pământeni în grupe de câte x . Dacă fiecare extraterestru furnizează lista tuturor extraterestrilor, iar fiecare pământean lista pământenilor care fac parte din același grup ca și el (incluzându-se și pe sine însuși), nu vom putea distinge niciun pământean.

2. Nu întotdeauna pot identifica un extraterestru. Fie că toți extraterestri furnizează liste identice dar sunt mai multe grupe de câte 15 liste identice, fie că unii extraterestri au mai nominalizat și oameni, este posibil să nu pot identifica niciun extraterestru.