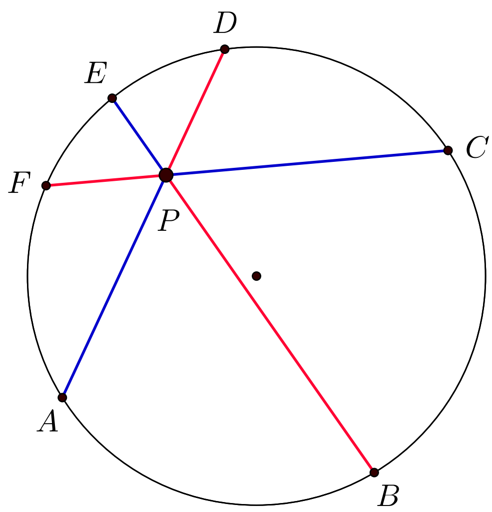
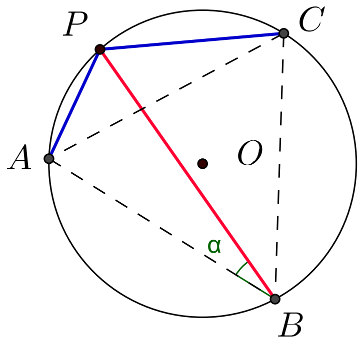
Fie P un punct situat în interiorul cercului $\mathscr{C}$. Prin punctul P se duc trei coarde care determină în jurul punctului P şase unghiuri de $60°$. Notăm A, B, C, D, E, F (în ordine) capetele acestor coarde. Arătaţi că

$$PA + PC + PE = PB + PD + PF.$$

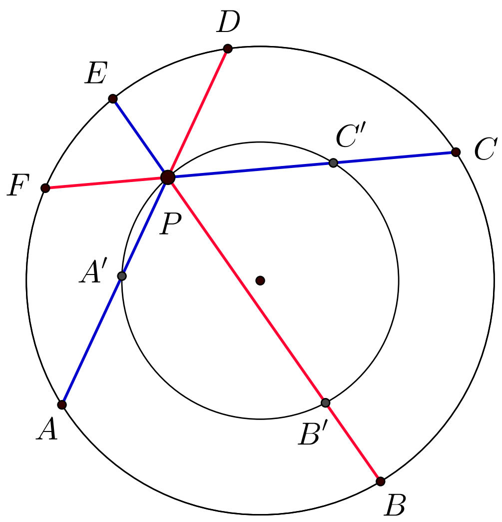
Kvant



Soluţie: preluată din [1]
Întrucât poziţia punctului P şi direcţiile coardelor sunt neprecizate, calcularea lungimii segmentelor este dificilă. Să remarcăm că enunţul trebuie să rămână valabil şi dacă ,,împingem" punctul P până la ,,margine", adică dacă luăm punctul P pe cercul $\mathscr{C}$.
Cele trei coarde devin $[PA]$, $[PB]$, $[PC]$ şi A, B, C devin vârfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul $\mathscr{C}$. Trebuie să arătăm că $PA + PC = PB$. Această proprietate a triunghiului echilateral este cunoscută. Ea se poate demonstra cu ajutorul unei rotaţii a figurii cu $60°$ în jurul vârfului A. O demonstraţie calculatorie: Fie $2\alpha = m(\sphericalangle POA)$. Atunci, dacă cercul $\mathscr{C}$ are raza de lungime r, $PA = 2r \sin \alpha$, $PB = 2r \sin(\alpha + 60°)$, $PC = 2r \sin(\alpha + 120°)$ şi, cum $\sin \alpha + \sin(\alpha + 120°) = 2 \sin(\alpha + 60°) \cos 60° = \sin(\alpha + 60°)$, rezultă $PA + PC = PB$.



Cum putem folosi cazul particular? Să reluăm problema generală.
Să ducem prin P un cerc concentric cu $\mathscr{C}$ şi fie A', B', C' intersecţiile acestuia cu coardele. Conform cazului particular avem $PA' + PC' = PB'$. Însă segmentele $[AA']$ şi $[PD]$ determinate de cele două cercuri concentrice pe coarda $[AD]$ sunt congruente. Analog, $[PE] \equiv [BB']$ şi $[PF] \equiv [CC']$ de unde $PA + PC + PE = PA' + A'A + PC' + C'C + PE = PB' + PD + PE + PF = PB + PD + PF$.



Comentarii:

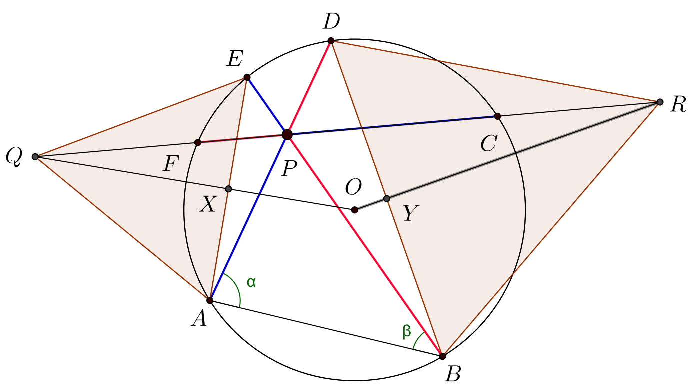
1. Rezultatul citat mai sus, anume că dacă punctul P se află pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC atunci $PB = PA + PC$ poartă numele de **Teorema lui van Schooten** (după matematicianul F. van Schooten, 1615 - 1660). El rezultă imediat din teorema lui Ptolemeu sau din rezultatul mai general:
Teorema lui Pompeiu (Dimitrie Pompeiu, matematician român, 1873 - 1954)
Dacă ABC este un triunghi echilateral şi P este un punct oarecare (în spaţiu!), atunci $PB \leq PA + PC$, cu egalitate dacă şi numai dacă punctul P se află pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului ABC.
Vezi şi: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Pompeiu.shtml

2. Foarte des rezolvarea problemei într-un caz particular poate fi extrem de utilă. Ea ne poate sugera rezultatul, uneori calea de a-l găsi, alteori, ca în cazul de mai sus, el poate fi folosit direct prin reducerea cazului general la cel particular. Un alt exemplu, asemănător celui de mai sus, poate fi găsit în [1], articol prezentat în cadrul materialelor teoretice de la secţiunea ,,geometrie".

3. De fapt, $P \in \mathscr{C}$ nu este un caz particular al problemei ci o situaţie ,,la limită". Pentru aceste situaţii afirmaţia problemei nu are întotdeauna sens şi chiar dacă are, nu este sigur că mai are loc concluzia. Dar dacă are, ea ne poate oferi informaţii la fel de utile ca şi considerarea cazurilor particulare. Alte situaţii ,,la limită" frecvent întâlnite în geometrie: triunghiuri degenerate, coarde devenite tangente, cercuri devenite puncte.

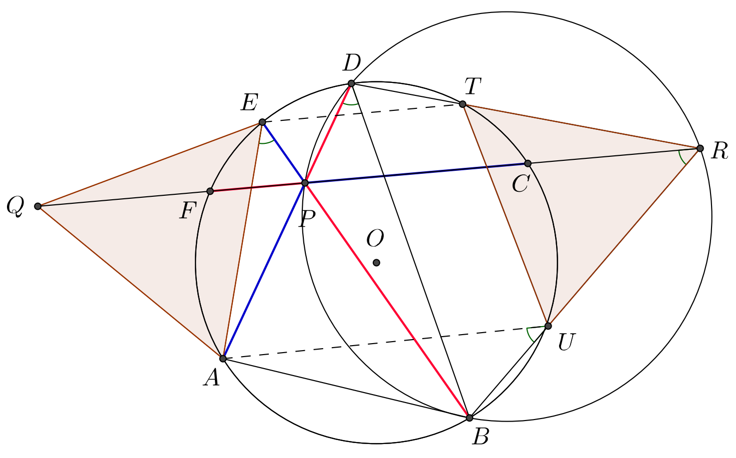
4. O altă idee interesantă de soluţie se bazează pe următoarea observaţie: P este simultan punctul lui Torricelli pentru triunghiurile ACE şi BDE.

Vă prezentăm mai întâi soluţia primită de la *Petru Braica*:



Observăm că $m(\sphericalangle APC) = m(\sphericalangle CPE) = m(\sphericalangle EPA) = 120°$ şi $m(\sphericalangle BPD) = m(\sphericalangle DPF) = m(\sphericalangle FPA) = 120°$, deci P este simultan punctul lui Torricelli pentru triunghiurile ACE şi BDF. Pe segmentele $[AE]$ şi $[BD]$ construim, către exteriorul cercului, triunghiurile echilaterale AEQ şi BDR. Se ştie că punctele C, P, Q sunt coliniare şi că $PA + PC + PE = QC$. De asemenea, F, P, R sunt coliniare şi $PB + PD + PF = FR$. Trebuie aşadar să arătăm că $QC = FR$, adică $QF = CR$. Această condiţie este echivalentă cu $OQ = OR$. Avem nevoie doar de una din implicaţii, anume: dacă $OQ = OR$, atunci notand M mijlocul lui $[CF]$, avem că $OM \perp FC$, deci $[OM]$ este înălţime în triunghiul isoscel OQR, deci este şi mediană. Atunci $QF = MQ - MF = MR - MC = RC$.
Vom demonstra că $OQ = OR$ prin calcul. Cum O şi Q se află pe mediatoare lui $[AE]$, notând cu X mijlocul lui $[AE]$, punctele O, X, Q sunt coliniare şi $OQ = OX + XQ$. Notând $m(\sphericalangle PAB) = \alpha$ şi $m(\sphericalangle PBA) = \beta$, avem $\alpha + \beta = 120°$. Atunci $QX = AE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r \sin\beta\sqrt{3}$, unde r este raza cercului $\mathscr{C}$. Cum $m(\sphericalangle AOE) = 2\beta$, deci $m(\sphericalangle AOX) = \beta$, avem $OX = r\cos\beta$. Aşadar $OQ = r(\sqrt{3}\sin\beta + \cos\beta)$. Analog $OR = r(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha)$. Finalul depăşeşte puţin nivelul matematicii de gimnaziu. Folosind că $\sqrt{3}\sin\beta + \cos\beta = \sqrt{3}\sin(120° - \alpha) + \cos(120° - \alpha) = \sqrt{3}(\sin 120° \cdot \cos\alpha - \sin 120° \cdot \cos\alpha) + (\cos 120° \cdot \cos\alpha + \sin 120° \cdot \sin\alpha) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha\right) = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$, obţinem că $OQ = OR$ şi concluzia.

Ştefan Dominte are o soluţie splendidă, bazată pe aceeaşi idee, dar care evită calculul trigonometric din final. Ştefan arată congruenţa $(FQ) \equiv (CR)$ astfel:



Fie T şi U intersecţiile (diferite de D şi B) ale dreptelor RD, respectiv RB cu cercul $\mathscr{C}$. Cum patrulaterul $BRDP$ este inscriptibil, avem că $\sphericalangle BUA \equiv \sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle BDP \equiv \sphericalangle BRP$, deci $AU \parallel CF$. Analog, $ET \parallel CF$, deci $AUTE$ este trapez isoscel. Rezultă că $AE = TU$, deci triunghiurile QAE şi RUT sunt congruente. $QRTE$ şi $TEFC$ sunt trapeze isoscele, de unde rezultă uşor congruenţa triunghiurilor EFQ şi TCR şi concluzia.

Cea mai simplă finalizare a acestei idei am găsit-o în soluţia primită de la *Mircea-Raul Bodrogean.*
Cu notaţiile din figura de mai sus, $OQ = OR$ rezultă din congruenţa triunghiurilor OQF şi ORC. Evident, $OF = OC$, ceea ce implică şi $\sphericalangle OFQ \equiv \sphericalangle OCR$. În plus, $\sphericalangle OQE \equiv \sphericalangle ORD$ (au 30°) şi $\sphericalangle PQE \equiv \sphericalangle PAE \equiv \sphericalangle PBD \equiv \sphericalangle PRD$, deci $m(\sphericalangle OQF) = 30^\circ - m(\sphericalangle PQE) = 30^\circ - m(\sphericalangle PRD) = m(\sphericalangle ORP)$, de unde concluzia. (S-a folosit inscriptibilitatea patrulaterelor $APEQ$, $ABDE$ şi $PBRD$.)

5. O altă idee, pe care se bazează şi soluţia iniţială din Kvant, cât şi alte soluţii, primite de la *Cezara Maria Petrui*, *Titu Zvonaru* şi *Mihai Miculiţa*, este de a proiecta O pe cele trei coarde. Evident, cele trei proiecţii se află pe cercul de diametru $[OP]$ (dacă $O \neq P$, cazul $O = P$ fiind banal) şi sunt vârfurile unui triunghi echilateral. Apoi se poate aplica relaţia van Schooten. Detalii într-unul din materialele ataşate, frumos redactate de *Mihai Miculiţa.*

6. Alte două demonstraţii se găsesc în articolul *Un sangaku contemporan*, de **Leonard Giugiuc**, RMT nr. 4/2014.
În plus, în articol se arată şi că $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 + PE^2 + PF^2 = 6r^2$.

7. Observaţie: (*Alexandru Mihalcu*)
Împărţind relaţia din enunţ cu puterea punctului P faţă de cerc, $\rho_{\mathscr{C}}(P) = PA \cdot PD = PB \cdot PE = PC \cdot PF$, obţinem

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PC} + \frac{1}{PE} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PD} + \frac{1}{PF}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] **Gh. Eckstein** – *Cum folosim cazuri particulare în rezolvarea unor probleme*, RMT nr. 4/2004, pag. 3-4