Problema săptămânii 29.

Să se afle maximul expresiei

$$\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y+1)}$$

când $x, y \in (0, \infty)$.

Neculai Stanciu, Buzău şi *Titu Zvonaru*, Comăneşti, Gazeta Matematică nr. 10/2016, problema **27279.**

Soluţia 1: (a autorilor)
Soluţia autorilor este una extrem de ingenioasă, dar destul de greu de găsit:

Fie ϕ rădăcina pozitivă a ecuaţiei $t^2 - t - 1 = 0$, adică *numărul de aur*.
Vom demonstra că

$$\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y+1)} \leq \frac{1}{5\phi+3}, \qquad (*)$$

cu egalitate dacă $x = y = \phi$, ceea ce arată că maximul căutat este $\frac{1}{5\phi+3}$.
Deoarece $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, avem
$(x+1)(y+1)(x+y+1) - (5\phi+3)xy = x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 - 5\phi xy =$
$x(y-\phi)^2 + y(x-\phi)^2 + \frac{\phi}{2} \cdot (x-y)^2 + \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)(x-\phi)^2 + \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)(y-\phi)^2 \geq 0,$
de unde concluzia.

Soluţia 2:
Să observăm mai întâi că

$$\frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y+1)} = \frac{xy}{(xy+x+y+1)(x+y+1)} =$$
$$\frac{(xy+x+y+1)-(x+y+1)}{(xy+x+y+1)(x+y+1)} = \frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{1+x+y+xy},$$

De aici se vede că dacă fixăm suma $x + y = s$, atunci valoarea maximă se atinge atunci când produsul xy este maxim, adică pentru $x = y$. Putem aşadar căuta în continuare maximul expresiei $E(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2(2x+1)} = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$ când $x > 0$.

Căutăm un $t > 0$ astfel ca $E(x) \le E(t)$, $\forall\, x > 0$. Avem $E(x) \le E(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} \le \dfrac{1}{2t+1} - \dfrac{1}{(t+1)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{1}{2t+1} \le \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(t+1)^2} \Leftrightarrow \dfrac{2(t-x)}{(2x+1)(2t+1)} \le \dfrac{(t-x)(t+x+2)}{(x+1)^2(t+1)^2} \Leftrightarrow$ $(t-x)\left(\dfrac{t+x+2}{(x+1)^2(t+1)^2} - \dfrac{2}{(2t+1)(2x+1)}\right) \ge 0 \Leftrightarrow (t-x)\big((2t+1)(2x+1)(t+x+2) - 2(t+1)^2(x+1)^2\big) \ge 0 \Leftrightarrow (t-x)\big(-2t^2x^2 + (4t+1)x + t\big) \ge 0 \quad (**)$.

Această relaţie trebuie să aibă loc pentru orice $x > 0$.
Pentru ca expresia să nu-şi schimbe semnul în punctul $x = t$, trebuie ca t să fie rădăcină a ecuaţiei de gradul II

$$-2t^2x^2 + (4t+1)x + t = 0$$

(privită ca ecuaţie în variabila x), adică trebuie ca $-2t^4 + 4t^2 + 2t = 0$. Cum $t > 0$, ecuaţia revine la $t^3 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 - t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t+1) - (t+1) = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - t - 1) = 0$. Cum $t > 0$, deducem că t este rădăcina pozitivă a ecuaţiei $t^2 - t - 1 = 0$.
În acest caz, relaţia $(**)$ revine la $(t-x)\big(-2t^2x^2 + 2t^3x + (-2t^3+4t+1)x + (2t^4 - 4t^2 - t) + \underbrace{(-2t^4 + 4t^2 + 2t)}_{=0}\big) \ge 0 \Leftrightarrow (t-x)^2(-2t^2x - 2t^3 + 4t + 1) \le 0$, $\forall\, x > 0$, ceea ce este adevărat pentru că $-2t^3 + 4t + 1 < 0$ (Avem $t^2 = t+1 \Rightarrow 2t^3 = 2t \cdot t^2 = 2t(t+1) = 2t^2 + 2t = 2(t+1) + 2t = 4t + 2 > 4t + 1$.)

Remarcă: (*Paul Becsi, Andrei Pantea*)
Faptul că expresia $A(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y+1)}$ îşi atinge maximul atunci când $x = y$ rezultă din inegalitatea

$$A(x,y) \le A\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right).$$

Efectuând calculele, această inegalitate se rescrie echivalent $x^2y + xy^2 + 2xy \le x^3 + y^3 + x^2 + y^2$, adică $(x-y)^2(x+y+1) \ge 0$. Ultima inegalitate este evident adevărată şi este satisfăcută cu egal dacă şi numai dacă $x = y$.
Vlad Vergelea ajunge la aceeaşi concluzie demonstrând că $A(x,y) \le A\big(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}\big)$: avem $x + y + 1 \ge 2\sqrt{xy} + 1$ şi, din CBS, $(1+x)(1+y) \ge (1+\sqrt{xy})^2$. Concluzia (anume că maximul se atinge dacă $x = y$) rezultă imediat.

Soluţia 3: (*Cristina Văcărescu*) (depăşeşte programa de juniori)
Aplicăm inegalitatea ponderată a mediilor (cu ponderi reale, pozitive). Avem, pentru orice $a > 0$, că:

$x+1 = 1\cdot x + a\cdot \frac{1}{a} \geq (1+a)\cdot \left(x\cdot \left(\frac{1}{a}\right)^a\right)^{1/(1+a)}$, cu egalitate dacă $x = \frac{1}{a}$,

$y+1 = 1\cdot y + a\cdot \frac{1}{a} \geq (1+a)\cdot \left(y\cdot \left(\frac{1}{a}\right)^a\right)^{1/(1+a)}$, cu egalitate dacă $y = \frac{1}{a}$ şi

$x+y+1 = 1\cdot x + 1\cdot y + a\cdot \frac{1}{a} \geq (2+a)\cdot \left(xy\cdot \left(\frac{1}{a}\right)^a\right)^{1/(2+a)}$, cu egalitate decă $x = y = \frac{1}{a}$.

Înmulţind aceste inegalităţi, obţinem că

$$(x+1)(y+1)(x+y+1) \geq (1+a)^2(2+a)(xy)^b\cdot \frac{1}{a^{2ab}},$$

unde $b = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a}$.

Căutăm $a > 0$ pentru care $b = 1$ (fracţia din enunţ are numărătorul xy).
Avem că $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} = 1 \Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0$, deci $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De aici se vede că maximul expresiei din enunţ se realizează pentru $x = y = \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Acest maxim se calculează şi se obţine a fi $\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$.

Comentariu: Am primit mai multe soluţii care, după ce arată că maximul se atinge în puncte în care $x = y$, determină maximul funcţiei $E : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2(1+2x)}$ cu ajutorul derivatelor. Deşi corecte şi mai scurte decât cele de mai sus, nu voi prezenta aceste demonstraţii.