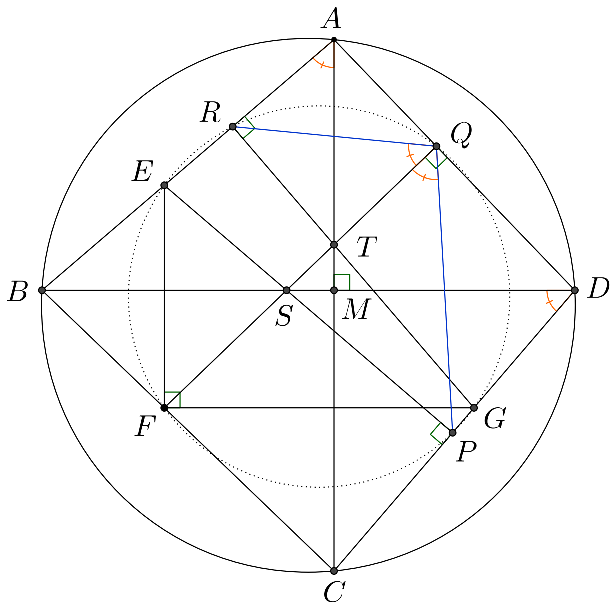
Problema săptămânii 28.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil având diagonalele perpendiculare şi F un punct oarecare pe latura (BC). Paralela din F la AC intersectează AB în punctul E, iar paralela din F la BD intersectează CD în G. Fie P proiecţia lui E pe CD, Q proiecţia lui F pe AD şi R proiecţia lui G pe AB. Demonstraţi că $(QF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PQR$.

Barajul 1, pb 1, China, 2014



Soluţia 1: (adaptată după soluţia din revista Crux Mathematicorum, vol. 42, nr. 9; soluţi asemănătoare am primit de la *Cezara Petrui, Alex Bledea* şi *Alex Gîrban*) Fie M punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului. Punctele P, R, F află pe cercul de diametru $[EG]$.
Din $EF \parallel AC$, $FG \parallel BD$ şi $ABCD$, $EFGP$ (sau $EFPG$) - inscriptibile rezultă că

$$\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle FGC \equiv \sphericalangle FEP.$$

Dacă $\{S\} = BD \cap EP$, atunci triunghiul BES este isoscel, deci EF este mediatoarea lui $[BS]$.
Prin urmare, $m(\sphericalangle BFS) = 2m(\sphericalangle BFE) = 2m(\sphericalangle ADB)$.
Pe de altă parte, din patrulaterul $ABFQ$, $m(\sphericalangle BFQ) = 270° - m(\sphericalangle QAB) - m(\sphericalangle ABF) = 270° - m(\sphericalangle DAC) - \big(\underbrace{m(\sphericalangle MAB) + m(\sphericalangle MBA)}_{=90°}\big) - m(\sphericalangle DBC) = 180° - \big(90° - m(\sphericalangle ADB)\big) - \big(90° - m(\sphericalangle EFB)\big) = 2m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle BFS)$, prin urmare $S \in (FQ)$.

Dacă $\{T\} = GR \cap AC$, se arată analog că $T \in FQ$. Atunci patrulaterele $SPDQ$ şi $ARTQ$ sunt insciptibile, deci

$$m(\sphericalangle FQP) = m(\sphericalangle BDC) = m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle RAT) = m(\sphericalangle RQT),$$

de unde concluzia.

Remarcă: (bazată pe postarea userului AoPS *bojler*)
Se ştie că punctul lui Mathot într-un patrulater inscriptibil ortogonal este chiar punctul de intersecţie a diagonalelor. (De aceea l-am şi notat M.) Acest fapt (remarcat şi de *Alex Bledea*) permite continuarea demonstraţiei astfel: Dacă U şi V sunt mijloacele laturilor AB, respectiv BC, atunci $MU \perp CD$ şi $MV \perp AD$ (din definiţia punctului lui Mathot). Dacă $\{S\} = FQ \cap EP$, atunci triunghiurile EFS şi UVM au laturi paralele, deci sunt omotetice. Prin urmare dreptele UE, FV şi SM sunt concurente, adică $S \in BD$. De aici se continuă ca în soluţia de mai sus.

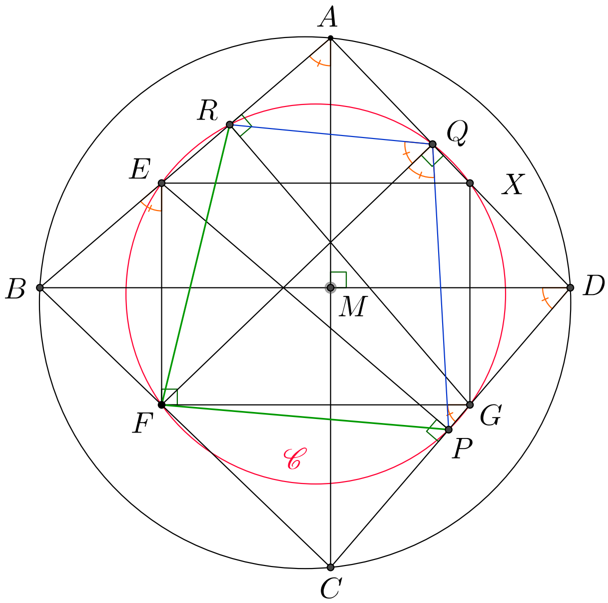
Mihai Miculiţa ne propune şi o altă (spectaculoasă) cale de a demonstra concurenţa dreptelor GR, FQ şi AC, folosind următoarea teoremă:

Teoremă. *Fiind date două triunghiuri $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$, următoarele două proprietăţi sunt echivalente:*
(i). perpendicularele duse din vârfurile A_1, B_1 şi C_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$ pe dreptele suport ale laturilor $[B_2C_2]$, $[C_2A_2]$ şi respectiv $[A_2B_2]$ ale triunghiului $A_2B_2C_2$ sunt concurente într-un punct P_1;
(ii). perpendicularele duse din vârfurile A_2, B_2 şi C_2 ale triunghiului $A_2B_2C_2$ pe dreptele suport ale laturilor $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$ şi respectiv $[A_1B_1]$ ale triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt concurente într-un punct P_2.
Două triunghiuri $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ care au una din cele două proprietăţi se numesc **triunghiuri ortologice** *şi în acest caz punctele P_1 şi P_2 sunt* **centrele de ortologie** *ale celor două triunghiuri ortologice.*

Triunghiurile ABD şi CFG sunt ortologice deoarece perpendicularele din A, B, D pe FG, GC, respectiv CF sunt concurente în ortocentrul triunghiului CFG. Prin urmare, şi perpendicularele din C, F, G pe BD, DA, respectiv AB, adică AC, FQ şi GR, sunt concurente.

Cheia acestei soluţii a fost remarcarea (şi justificarea) concurenţei dreptelor PE, FQ, BD, respectiv RG, FQ, AC. Soluţia a doua nu foloseşte acest fapt, dar remarcă alte proprietăţi geometrice ale configuraţiei:

Soluţia 2: (user AoPS *XmL* şi *Vlad Vergelea*)



Punctele P, R, F află pe cercul de diametru $[EG]$, deci

$$\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle FGC,$$

prin urmare $PF = RF$. Acest lucru arată că este suficient să demonstrăm că punctul Q se găseşte pe cercul $\mathscr{C}$ pe care se află punctele G, P, F, R, E. Paralela prin E la BD intersectează AD în X. Atunci

$$\frac{AX}{DX} = \frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF} = \frac{CG}{DG},$$

deci $GX \parallel AC$. Prin urmare, $FEXG$ este dreptunghi, deci şi X se află pe cercul $\mathscr{C}$. În fine, cum $m(\sphericalangle FGX) = m(\sphericalangle FQX) = 90°$, rezultă că şi punctul Q se află pe cercul $\mathscr{C}$, de unde concluzia.