Problema săptămânii 27.

Arătaţi că există o mulţime infinită de numere naturale cu proprietatea că nicio submulţime finită a ei nu are suma elementelor pătrat perfect.

Concursul revistei KöMaL, ianuarie 2013, pb. B. 4506., propusă de *P. Kutas*

Soluţia 1:
Ideea: Dacă am ales numerele naturale $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ astfel încât suma elementelor oricărei submulţimi a mulţimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ să nu fie pătrat perfect, îl alegem pe x_{n+1} ,,mult mai mare decât numerele deja alese".
De exemplu, putem porni cu $x_1 = 2$ (sau orice număr care nu este pătrat perfect), apoi definim $x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + 1$, $\forall\, n \geq 1$.
Orice submulţime finită a mulţimii (infinite) $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$ are proprietatea dorită:
Dacă x_n cu $n > 1$ este cel mai mare element al unei submulţimi finite oarecari, atunci suma elementelor submulţimii este cel puţin $x_n = (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^2+1$ şi cel mult $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n = (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^2+(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})+1 < (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+1)^2$, deci este cuprinsă între două pătrate perfecte consecutive, prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

Soluţia 2:
Ideea: Alegem elementele mulţimii de o anumită formă, astfel încât forma acestora să nu permită niciunei submulţimi finite să aibă suma elementelor pătrat perfect.
Alegem elementele ca puteri impare distincte ale lui 2 (sau ale oricărui alt număr prim). Putem, de pildă, alege $M = \{2^1, 2^3, 2^5, \ldots\}$ (sau orice submulţime infinită a acesteia).
Dacă $S = \{2^{2a_1+1}, 2^{2a_2+1}, \ldots, 2^{2a_n+1}\}$ este o submulţime finită a lui M, cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, atunci suma elementelor lui S este divizibilă cu 2^{2a_1+1} dar nu şi cu 2^{2a_1+2}, deci nu este pătrat perfect.

Variantă: (*Radu Popescu*)
Putem alege mulţimea $M = \{3 \cdot 10^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Suma numerelor din orice submulţime finită a lui M va fi un număr de forma $10^{2j} \cdot s$, unde s este un număr care are ultima cifră 3. Prin urmare nici s, nici $10^{2j} \cdot s$ nu este pătrat perfect.