Problema săptămânii 26.

Fie $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ un şir crescător infinit de numere naturale nenule. Demonstraţi că există un unic număr natural nenul n pentru care

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Soluţie: (Problema a fost dată în noiembrie la un test prin corespondenţă adresat juniorilor francezi. Soluţia de mai jos este cea de acolo.)

Pentru $m \geq 1$ definim $d_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m - ma_m$.
În mod evident, inegalitatea din stânga revine la $d_n > 0$. Pe de altă parte, $d_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n - na_{n+1}$, deci inegalitatea din dreapta se traduce prin $d_{n+1} < 0$. Prin urmare, avem de arătat că există un unic $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $d_{n+1} \leq 0 < d_n$, ceea ce ne face să studiem variaţia şirului (d_m).
Pentru orice m, avem $d_{m+1} - d_m = m(a_m - a_{m+1}) < 0$ deoarece şirul (a_m) este strict crescător. În plus, avem $d_1 = a_0 > 0$.
Astfel, (d_m) este un şir strict descrescător de numere întregi, cu primul termen pozitiv. Este clar că de la un rang termenii şirului (d_m) vor deveni mai mici sau egali cu 0. Alegem $n \geq 1$ rangul ultimului termen pozitiv al şirului (d_m). Atunci $d_{n+1} \leq 0 < d_n$ şi acest n este unicul cu proprietatea cerută.

Remarcă: Ipoteza ca numerele să fie naturale nenule poate fi slăbită un pic, dar nu se poate renunţa complet la ea. Aşa cum observă *Alex Gîrban*, este suficient să existe un $k > 0$ astfel încât $a_{m+1} - a_m \geq k$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$ şi concluzia se păstrează.

Însă dacă punem ,,reale pozitive" sau chiar ,,raţionale pozitive" în loc de ,,naturale", concluzia nu mai rămâne valabilă, după cum rezultă din exemplul următor: şirul (a_m) definit prin $a_m = 2 - \dfrac{1}{2^m}$, $m \geq 0$, este un şir strict crescător de numere raţionale pozitive, dar $\dfrac{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > 2 > a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.