Problema săptămânii 25.

a) Se pot aranja numerele 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 pe o dreaptă astfel încât, pentru orice $m \in \{1, 2, \ldots, 1998\}$, între cele două copii ale lui m să fie scrise exact m numere?
b) Se pot aranja numerele 0, 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 pe o dreaptă astfel încât, pentru orice $m \in \{1, 2, \ldots, 1998\}$, între cele două copii ale lui m să fie scrise exact m numere?
c) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care numerele 0, 1, 1, 2, 2, ..., n, n se pot aranja pe o dreaptă astfel încât, pentru orice $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, între cele două copii ale lui m să fie scrise exact m numere.

a) este de la Concursul KöMaL, 1998
Este şi în cartea lui Engel o problemă foarte asemănătoare (pb 52, pag. 25), dar între cele două copii ale numărului i acolo trebuie să fie $i-1$ numere.
Pentru 50 în loc de 1998, problema s-a dat şi la cel mai recent test prin corespondenţă din cadrul selecţiei franceze.
c) este de la Turneul Oraşelor 2015
http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/archives/TT2015S_JOsolutions.pdf

Soluţie: a) Varianta 1:
Colorăm alternativ cele $2 \cdot 1998$ pătrate cu alb şi negru. Cele două copii ale unui număr impar vin pe pătrate de aceeaşi culoare, iar cele două copii ale unui număr par pe pătrate de culori diferite. În total, numerele pare vor acoperi la fel de multe pătrate albe ca şi negre, deci şi numerele impare trebuie să acopere la fel de multe pătrate albe ca şi negre. Prin urmare, trebuie să avem un număr par de numere impare, ceea ce nu e cazul.
Varianta 2: (*Laurenţiu Ploscaru*)
Numerotăm de la 1 la $2 \cdot 1998$ poziţiile pe care vin plasate numerele. Fie x_i poziţia pe care o ocupă prima copie a lui i şi y_i poziţia pe care o ocupă cea de-a doua. Dacă o asemenea aranjare ar fi posibilă, atunci am avea $\sum_{i=1}^{1998}(x_i + y_i) =$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2 \cdot 1998 = \text{par, iar} \sum_{i=1}^{1998}(y_i - x_i) = \sum_{i=1}^{1998}(i+1) = \text{impar}.$$

Dar cele două sume ar fi trebuit să aibă aceeaşi paritate. Aşadar o asemenea aranjare nu este posibilă

b), c)
Vom demonstra că o asemenea aranjare este posibilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
În particular, ea este posibilă şi pentru $n = 1998$, ceea ce rezolvă punctul b).
Examinând cazuri particulare şi căutând un model de a distribui numerele, vedem

uşor că am putea scrie numere pare nenule într-o secvenţă de tipul

$$\ldots\ 6\ 4\ 2\ ?\ ?\ 2\ 4\ 6\ \ldots$$

şi numerele impare într-o secvenţă de forma

$$\ldots\ 5\ 3\ 1\ ?\ 1\ 3\ 5\ \ldots$$

Cheia e să ,,legăm" aceste două lanţuri.
Dacă n este par, $n = 2k$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, atunci putem îmbina cele două lanţuri astfel:

$$2k-1\ 2k-3\ \ldots\ 3\ 1\ 2k\ 1\ 3\ \ldots\ 2k-1\ 2k-2\ 2k-4\ \ldots\ 4\ 2\ 0\ 2k\ 2\ 4\ \ldots\ 2k-4\ 2k-2$$

Dacă n este impar, $n = 2k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, atunci putem îmbina cele două lanţuri astfel:

$$2k+1\ 2k-1\ \ldots\ 3\ 1\ 2k\ 1\ 3\ \ldots\ 2k+1\ 2k-2\ 2k-4\ \ldots\ 4\ 2\ 2k\ 0\ 2\ 4\ \ldots\ 2k-4\ 2k-2$$

ENGLISH VERSION:

Problem of week no. 25

a) Is it possible to arrange the integers 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 on a line such that there are exactly m numbers placed between the two copies of m, for every $1 \leq m \leq 1998$?
b) Is it possible to arrange the integers 0, 1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998 on a line such that there are exactly m numbers placed between the two copies of m, for every $1 \leq m \leq 1998$?
c) Among $2n+1$ positive integers there is exactly one 0, while each of the numbers 1, 2, ..., n is presented exactly twice. For which n can one line up these numbers so that for any $m = 1, \ldots, n$ there are exactly m numbers between two m's?
The English solution to **c)** can be found at
http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/archives/TT2015S_JOsolutions.pdf

a) is from KöMaL 1998; it is very simmilar to *Arthur Engel – Problem-Solving Strategies, Chapter 1, pb. no 52*
c) is from Tournament of Towns, 2015, Spring, Juniors, pb. no. 5