**Problema săptămânii 23.**

Numerele naturale nenule $a$ şi $b$, scrise în baza 10, se pot obţine unul din altul prin schimbarea ordinii cifrelor. Demonstraţi că:
a) numerele $2a$ şi $2b$ au aceeaşi sumă a cifrelor;
b) dacă $a$ şi $b$ sunt numere pare, atunci numerele $\frac{a}{2}$ şi $\frac{b}{2}$ au aceeaşi sumă a cifrelor.

*Kvant*

**Soluţie:**
Notăm cu $s(x)$ suma cifrelor numărului natural $x$.
**a)** (*Răzvan Puşcaşu*)
Dacă un număr $c$ are $m_0$ cifre de 0, $m_1$ cifre de 1 şi aşa mai departe, prin înmulţire cu 2, se obţine numărul $2c$ care, dacă n-ar exista treceri peste ordin, ar avea $m_0+m_5$ cifre de 0, $m_1+m_6$ cifre de 2, $m_2+m_7$ cifre de 4, $m_3+m_8$ cifre de 6 şi $m_4+m_9$ cifre de 8. Suma cifrelor sale ar fi atunci $2(m_1+m_6)+4(m_2+m_7)+6(m_3+m_8)+8(m_4+m_9)$. Dacă luăm acum în considerare trecerile peste ordin, acestea sunt egale de fiecare dată cu 1 şi nu generează alte treceri peste ordin (adică ultima cifră a lui $2t+1$ este cu 1 mai mare decât ultima cifră a lui $2t$). Prin urmare, suma cifrelor lui $2c$ este $2(m_1+m_6)+4(m_2+m_7)+6(m_3+m_8)+8(m_4+m_9)+N$, unde $N$ este numărul trecerilor peste ordin, adică numărul cifrelor $\geq 5$, deci $m_5+m_6+m_7+m_8+m_9$. Putem scrie că $s(2c) = 2m_1 + 4m_2 + 6m_3 + 8m_4 + m_5 + 3m_6 + 5m_7 + 7m_8 + 9m_9$. Prin urmare, suma cifrelor lui $2c$ depinde numai de numărul cifrelor de fiecare fel ale lui $c$, nu şi de ordinea acestora, de unde concluzia.

*Altfel:*

Observăm că $s(2c) = 2s(c) - 9N(c)$, unde $N(c)$ este numărul de cifre $\geq 5$ ale lui $c$ (numărul trecerilor peste ordin).
Într-adevăr, dacă $c = \overline{a_1a_2\ldots a_k}$, când efectuăm produsul $c \cdot 2$, fiecare cifră $a_i$ a lui $c$ va fi înlocuită cu:
• dacă nu avem trecere peste ordin de la înmulţirea cu 2 a lui $a_{i+1}$ atunci cu $2a_i$ (dacă $a_i < 5$) sau cu $2a_i - 10$ (dacă $a_i \geq 5$)
• dacă avem trecere peste ordin de la înmulţirea cu 2 a lui $a_{i+1}$ atunci cu $2a_i + 1$ (dacă $a_i < 5$) sau cu $2a_i - 10 + 1$ (dacă $a_i \geq 5$).
Prin urmare, $s(2c) = s(c) - 10N(c) + N(c) = s(c) - 9N(c)$.
Şi această formulă arată clar că $s(2c)$ depinde numai de care anume sunt cifrele lui $c$, nu şi de ordinea acestora.

**b)** (*Paul Becsi, Alex Gîrban*)
Dacă $a = 2c$, $b = 2d$, atunci avem de arătat că $S(c) = S(d)$. Dar $S(a) = S(b)$, deci avem de arătat că $N(c) = N(d)$. Dar numărul de treceri peste ordin la înmulţirea cu 2 a unui număr $x$ se află uşor: este tocmai numărul de cifre impare ale lui $2x$.

Cum $a = 2c$ şi $b = 2d$ au acelaşi număr de cifre impare, concluzia rezultă imediat.

Deoarece $s(c) = s(10c)$, rezultă că $s\left(\frac{a}{2}\right) = s\left(\frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow s(5a) = s(5b)$. Reformulată, problema a fost dată la Şcoala cu Ceas în 2013.

Vă prezentăm enunţul şi soluţiile de acolo:

Demonstraţi că dacă numerele $a$ şi $b$ diferă numai prin ordinea cifrelor lor, atunci suma cifrelor numerelor $5a$ şi $5b$ este aceeaşi.

*Kvant*

**Soluţia 1:**
Vom arăta că dacă $a = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$, atunci suma cifrelor numărului $5a$ este

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k}{2}\right] + 5N \qquad (*),$$

unde $N$ reprezintă numărul de cifre impare din scrierea zecimală a lui $a$. De aici rezultă în mod evident că această sumă nu depinde de ordinea cifrelor numărului $a$, de unde concluzia.
Calculând $5a = 10a : 2 = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 0} : 2$, constatăm că $5a$ are prima cifră $\left[\frac{x_n}{2}\right]$, următoarele calculându-se împărţind fie numărul $\overline{x_{n-1} \dots x_2 x_1 0}$ la 2 dacă $x_n$ este par, fie numărul $\overline{1x_{n-1} \dots x_2 x_1 0}$ la 2 dacă $x_n$ este impar. În primul caz următoarea cifră a lui $5a$ este $\left[\frac{x_{n-1}}{2}\right]$, iar în cazul al doilea ea este $\left[\frac{10 + x_{n-1}}{2}\right] = 5 + \left[\frac{x_{n-1}}{2}\right]$. Continuăm acest precedeu (algoritmul împărţirii) până când ajungem la determinarea ultimei cifre a lui $10a : 2$. Aceasta va fi fie 0 dacă $x_1$ a fost par, fie 5 dacă $x_1$ a fost impar. Am demonstrat astfel relaţia $(*)$.

**Soluţia 2:** Relaţia $(*)$ poate fi demonstrată şi scriind $x_k = y_k + z_k$ pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., n\}$, unde $y_k = 2\left[\frac{x_k}{2}\right]$, iar $z_k = 0$ dacă $x_k$ este par şi $z_k = 1$ dacă $x_k$ este impar. Aşadar $N$ dintre cifrele $z_k$ sunt egale cu 1, celelalte 0.
Atunci $5a = 10a : 2 = \overline{y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1 0} : 2 + \overline{z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 0} : 2 \qquad (**)$.
Deoarece $\overline{y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1 0}$ are toate cifrele pare, este uşor de văzut că $\overline{y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1 0} : 2$ are suma cifrelor $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k}{2}\right]$. Numărul $\overline{z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 0} : 2 = 5 \cdot \overline{z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1}$ are toate cifrele 0 sau 5, deci suma cifrelor sale va fi $5N$.
Mai rămâne să remarcăm că numărul $\overline{y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1 0} : 2$ are toate cifrele mai mici decât 5, deci la efectuarea sumei $(**)$ nu există trecere peste ordin, ceea ce implică faptul că suma cifrelor lui $5a$ este suma dintre suma cifrelor celor doi termeni ai

sumei, adică $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k}{2}\right] + 5N$.

**Remarcă:** Cu reformularea subpunctului **b)**, problema cere, în două cazuri particulare, $k = 2$ şi $k = 5$, să arătăm că dacă $a$ şi $b$ diferă numai prin ordinea cifrelor, atunci $s(ka) = s(kb)$. Ce este atât de special cu aceste numere, 2 şi 5? Are oare loc proprietatea pentru, să zicem, $k = 3$?
De ce nu funcţionează raţionamentul de mai jos (copy-paste după cel de la **a)**):

Dacă un număr $c$ are $m_0$ cifre de 0, $m_1$ cifre de 1 şi aşa mai departe, prin înmulţire cu 3, se obţine numărul $3c$ care, dacă nu ţinem cont de trecerile peste ordin, ar avea $m_0$ cifre de 0, $m_1$ cifre de 3, $m_2$ cifre de 6, $m_3$ cifre de 9, $m_4$ cifre de 2, $m_5$ cifre 5, $m_6$ cifre 8, $m_7$ cifre 1, $m_8$ cifre 4 şi $m_9$ cifre 7. Suma cifrelor sale ar fi atunci $3m_1 + 6m_2 + 9m_3 + 2m_4 + 5m_5 + 8m_6 + m_7 + 4m_8 + 7m_9$. Dacă luăm acum în considerare trecerile peste ordin, acestea sunt egale cu 1 pentru cifrele 4, 5, 6 şi cu 2 pentru cifrele 7, 8 şi 9. Prin urmare, suma cifrelor lui $3c$ este $3m_1 + 6m_2 + 9m_3 + 2m_4 + 5m_5 + 8m_6 + m_7 + 4m_8 + 7m_9 + (m_4 + m_5 + m_6) + 2(m_7 + m_8 + m_9)$. Prin urmare, suma cifrelor lui $3c$ depinde numai de numărul cifrelor de fiecare fel ale lui $c$, nu şi de ordinea acestora, de unde concluzia.

Problema este că nu mai este întotdeauna adevărat că ultima cifră a lui $3t + 1$ este cu 1 mai mare decât ultima cifră a lui $3t$, ori acest lucru arată că trecerile peste ordin pot genera noi treceri peste ordin. De exemplu 43 şi 34 au aceleaşi cifre, dar $s(3 \cdot 43) = 1+2+9 = 12$, iar $s(3 \cdot 34) = 1+0+2 = 3$. Observaţi cum ce se întâmplă la înmulţirea cu 3 a cifrei 3: pentru 43 va da 9, pentru 34, din cauza transferului, va produce cifra 0.
Cheia e că la înmulţirea cu 2 obţinem numai cifre pare şi treceri peste ordin maxim 1, ori cifră pară $+1 \leq 9$, deci trecerea peste ordin nu generează noi treceri peste ordin (în afara celor generate de înmulţire). La înmulţirea cu 5 obţinem numai cifre 0 sau 5 şi treceri peste ordin cel mult 4, deci iarăşi adunarea $c+t$ cu $c \in \{0, 5\}$ şi $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ are rezultat cel mult 9.