Problema săptămânii 22.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ cu $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Arătaţi că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k + 2n - 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Marian Cucoaneş

Gazeta Matematică seria B, nr. 6-7-8/2016, problema 27256
Problema este o consecinţă a unei probleme date de Gheorghe Eckstein şi Vasile Cîrtoaje la un baraj de seniori din 1999[1]:

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive cu $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Arătaţi că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k + n - 1} \leq 1.$$

Soluţie:
Inegalitatea se scrie echivalent

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{x_k + n - 1} \leq n - 1$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_k}{x_k + n - 1}\right) \leq n - 1$$

adică

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + n - 1} \geq 1.$$

Vom demonstra că $\dfrac{x_k}{x_k + n - 1} \geq \dfrac{x_k^{1-\frac{1}{n}}}{x_1^{1-\frac{1}{n}} + x_2^{1-\frac{1}{n}} + \ldots + x_n^{1-\frac{1}{n}}}$, $\forall\, k = \overline{1, n}$, inegalităţi care adunate duc la cea de mai sus. Într-adevăr, din inegalitatea mediilor, $x_1^{1-\frac{1}{n}} + x_2^{1-\frac{1}{n}} + \ldots + x_{k-1}^{1-\frac{1}{n}} + x_{k+1}^{1-\frac{1}{n}} + \ldots + x_n^{1-\frac{1}{n}} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{(x_1 x_2 \ldots x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}} = (n-1)\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_n} = (n-1) x_k^{-\frac{1}{n}}$, ceea ce conduce imediat la inegalitatea de mai sus.
Egalitatea are loc dacă toate numerele sunt egale cu 1.

[1] vezi de pildă cartea *Old and New Inequalities*, de Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, Vasile Cîrtoaje, Mircea Lascu, Ed. GIL, 2004, problema 84

Problema săptămânii rezultă din cea de mai sus de exemplu astfel:
• aplicăm problema de mai sus numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($2n$ numere pozitive cu produsul 1). Cum fiecare din cei doi termeni apare de două ori, împărţind cu 2 obţinem concluzia.
SAU
• adaptăm demonstraţia de mai sus:
(soluţie trimisă de *Titu Zvonaru*)
Vom demonstra inegalitatea în cazul mai general $x_1x_2\ldots x_n \geq 1$.
Inegalitatea se scrie echivalent

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + 2n - 1} \geq \frac{1}{2}\,.$$

Din inegalitatea mediilor,

$$\frac{x_k}{x_k + 2n - 1} \geq \frac{x_k}{x_k + (2n-1)\sqrt[2n-1]{x_1x_1\ldots x_{k-1}x_{k-1}x_kx_kx_{k+1}x_{k+1}\ldots x_nx_n}} =$$

$$\frac{x_k^{\frac{2n-1}{2n}}}{x_k^{\frac{2n-1}{2n}} + (2n-1)\sqrt[2n-1]{\left(x_1^{\frac{2n-1}{2n}}x_1^{\frac{2n-1}{2n}}\ldots x_{k-1}^{\frac{2n-1}{2n}}x_{k-1}^{\frac{2n-1}{2n}}x_k^{\frac{2n-1}{2n}}x_{k+1}^{\frac{2n-1}{2n}}x_{k+1}^{\frac{2n-1}{2n}}\ldots x_n^{\frac{2n-1}{2n}}x_n^{\frac{2n-1}{2n}}\right)}}$$

$$\geq \frac{x_k^{\frac{2n-1}{2n}}}{2\left(x_1^{\frac{2n-1}{2n}} + x_2^{\frac{2n-1}{2n}} + \ldots + x_n^{\frac{2n-1}{2n}}\right)}.$$

Prin adunare cu inegalităţile analoage se obţine concluzia.
SAU
• (o idee a lui *Paul Becsi*)
Scriem cunoscuta ingalitate $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ pentru numerele $a = x_k + n - 1$ şi $b = n$, obţinând

$$\frac{1}{x_k + 2n - 1} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_k + n - 1} + \frac{1}{n}\right).$$

Scrind aceste relaţii pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ şi folosind inegalitatea de la baraj se obţine tocmai inegalitatea dorită.

Vă prezentăm şi o soluţie bazată pe o altă idee:
Soluţie (*Alexandru Mihalcu*)
Rescriem inegalitatea de demonstrat, ca în soluţiile de mai sus,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + 2n - 1} \geq \frac{1}{2}\,,$$

apoi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{2n-1}{x_k}} \geq \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Dacă $a > 0$ este un număr fixat şi $x, y > 0$, avem

$$\frac{1}{1+\dfrac{a}{x}} + \frac{1}{1+\dfrac{a}{y}} \geq \frac{1}{1+\dfrac{a}{xy}} + \frac{1}{1+\dfrac{a}{1}}.$$

Într-adevăr, ultima inegalitate se scrie echivalent

$$\frac{a(x-1)(y-1)(xy-a^2)}{(x+a)(y+a)(xy+a)(1+a)} \geq 0.$$

Dacă există vreun număr $x_i \geq a = 2n-1$, atunci avem deja $\dfrac{1}{1+\dfrac{2n-1}{x_i}} \geq \dfrac{1}{2}$.

Dacă toate numerele sunt mai mici decât $a = 2n-1$, alegând $x = x_i > 1$ şi $y = x_j < 1$ şi folosind inegalitatea de mai sus, se vede că dacă înlocuim x_i şi x_j cu $x_i x_j$ şi 1, expresia din membrul stâng al inegalităţii (1) scade, iar produsul numerelor nu se schimbă. Acest proces de înlocuire este mereu posibil (câtă vreme există numere subunitare există şi supraunitare şi invers) şi continuă atâta timp cât există numere diferite de 1 (Numărul numerelor diferite de 1 scade cu cel puţin 1 la fiecare pas, deci la un moment dat procesul de înlocuire se termină.) La final, toate numerele sunt egale cu 1, iar suma din membrul stâng dă tocmai $\dfrac{1}{2}$.